

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 8.1: Revisão Espaço de Estados

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS

Equações no espaço de estados

De um modo simplificado serão consideradas as seguintes equações de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

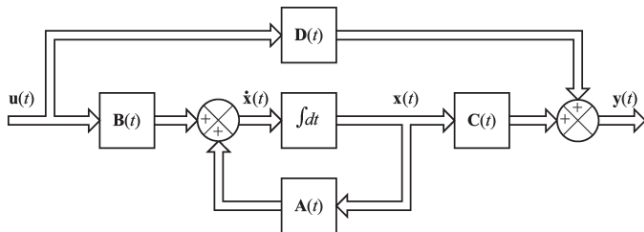
onde **A** é chamada matriz de estado, **B**, de matriz de entrada, **C**, de matriz de saída, e **D**, de matriz de transmissão direta. A Equação (1) é a equação de estado de um sistema linear invariante no tempo e a Equação (2) é a equação de saída para o mesmo sistema.

Diagrama de blocos do modelo de espaço de estados

Uma representação do diagrama de blocos das equações (1) e (2) é mostrada na Figura 2.14.

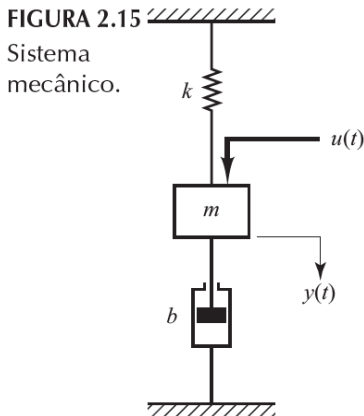
FIGURA 2.14

Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo, representado no espaço de estados.



Exemplo 2.12

Considere o sistema mecânico indicado na Figura 2.15. Admitimos que o sistema seja linear. A força externa $u(t)$ é a entrada do sistema, e o deslocamento $y(t)$ da massa é a saída. O deslocamento $y(t)$ é medido a partir da posição de equilíbrio, na ausência da força externa. Este é um sistema de entrada e saída únicas.



Exemplo 2.12

De acordo com o diagrama, a equação do sistema é:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \quad (3)$$

Esse sistema é de segunda ordem. Isso significa que ele contém duas derivadas ou dois integradores. Vamos definir as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam respectivamente a posição e a velocidade da massa:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Então obtemos

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

ou

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \quad (5)$$

A equação de saída é:

$$y = x_1$$

Exemplo 2.12

Sob a forma vetorial-matricial, as equações (4) e (5) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (7)$$

A equação de saída, Equação (6), pode ser escrita como:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A Equação (7) é uma equação de estado e a Equação (8) é uma equação de saída para o sistema. As equações (7) e (8) estão escritas na forma-padrão (1), (2), onde

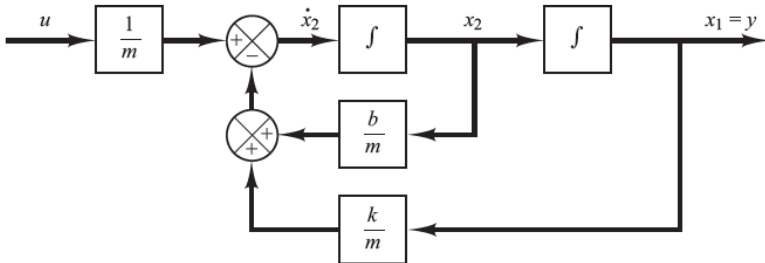
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0.$$

Exemplo 2.12

A Figura 2.16 é um diagrama de blocos do sistema. Note que as saídas dos integradores são variáveis de estado.

FIGURA 2.16

Diagrama de blocos do sistema mecânico mostrado na Figura 2.15.



Funções de transferência e equações no espaço de estados

A seguir, mostraremos como obter uma função de transferência de um sistema de entrada e de saída únicas a partir das equações no espaço de estados.

Consideremos o sistema cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (9)$$

Esse sistema pode ser representado no espaço de estados pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad (11)$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor de estado, u é a entrada e y é a saída.

Funções de transferência e equações no espaço de estados

A transformada de Laplace das equações (10) e (11) é dada por:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (12)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \quad (13)$$

Uma vez que a função de transferência é a relação entre a transformada de Laplace da saída e da entrada quando as condições iniciais são nulas, estabelecemos $\mathbf{x}(0)$ igual a zero na Equação (12). Então, temos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Multiplicando previamente por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ambos os lados dessa última equação:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (14)$$

Substituindo a Equação (14) na Equação (13), temos:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) \quad (15)$$

Comparando a Equação (15) com a Equação (9), vemos que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \quad (16)$$

é a função de transferência do sistema em termos de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e D .

Funções de transferência e equações no espaço de estados

Observe que o lado direito da Equação (16) envolve $(sI - A)^{-1}$. Sabe-se que para uma matriz 2×2 , por exemplo, tem-se que

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Em consequência, $G(s)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|sI - \mathbf{A}|}$$

onde $Q(s)$ é um polinômio em s . A notação $|sI - \mathbf{A}| = \det(sI - \mathbf{A})$ é igual ao polinômio característico de $G(s)$.

Definição: Autovalores e polos

O escalar λ é chamado de **autovalor** da matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ e ele corresponde aos polos da função de transferência $G(s)$. Para calcular os autovalores de uma matriz basta resolver a equação característica:

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$$

Exemplo 2.3

Considere novamente o sistema mecânico mostrado na Figura 2.15. As equações de espaço de estados para o sistema são dadas pelas equações (7) e (8). Vamos obter a função de transferência do sistema a partir das equações do espaço de estados. Pela substituição de **A**, **B**, **C** e **D** na Equação (16), obtemos:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & (s + \frac{b}{m}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \text{adj}(M) \Rightarrow \text{adj}(M) = [M_{ij}]' \quad \text{com} \quad M_{ij} = (-1)^{i+j} |H_{ij}|$$

em que H_{ij} é uma submatriz de M , de ordem $(n - 1)$ obtida eliminando a i -ésima linha e j -ésima coluna de M . Se M é uma matriz 2×2 , tem-se

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.3

Note que

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & (s + \frac{b}{m}) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} (s + \frac{b}{m}) & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} (s + \frac{b}{m}) & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

Que seria a mesma função de transferência obtida aplicando-se a transformada de Laplace na equação diferencial de segunda ordem (3):

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \Rightarrow (ms^2 + bs + k)Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

REPRESENTAÇÃO EM FORMAS CANÔNICAS

Representação no espaço de estados em formas canônicas.

Considere um sistema definido pela seguinte equação diferencial de ordem n :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (17)$$

onde u é a entrada e y é a saída. Essa equação também pode ser escrita como a seguinte função de transferência.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (18)$$

Muitas técnicas estão disponíveis para a obtenção da representação no espaço de estados a partir de funções de transferência. Nesta aula, introduziremos as representações no espaço de estados de sistemas definidos pelas equações (17) ou (18) nas formas canônicas controlável, observável e diagonal (ou de Jordan).

Representação de funções de transferência no espaço de estados

Forma canônica controlável.

A seguinte representação no espaço de estados é denominada forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (19)$$

$$y = [(b_n - a_n b_0) \quad (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \quad \cdots \quad (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (20)$$

A forma canônica controlável é importante na discussão do projeto de sistemas de controle pela abordagem por alocação de polos.

Representação de funções de transferência no espaço de estados

Forma canônica observável.

A seguinte representação no espaço de estados é denominada forma canônica observável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_n - a_n b_0) \\ (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \\ \vdots \\ (b_1 - a_1 b_0) \end{bmatrix} u \quad (21)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (22)$$

Note que a matriz de estado $n \times n$ da equação de estado dada pela Equação (21) é a transposta daquela equação de estado definida pela Equação (19).

Forma canônica diagonal.

Considere a função de transferência definida pela Equação (18). Consideramos aqui o caso em que o polinômio do denominador envolve somente raízes distintas. Para o caso de raízes distintas, a Equação (18) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}\end{aligned}\quad (23)$$

A forma canônica diagonal da representação no espaço de estados desse sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (24)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (25)$$

Forma canônica de Jordan.

Em seguida, consideraremos o caso em que o polinômio do denominador da Equação (18) envolve raízes múltiplas. Para esse caso, a forma canônica diagonal anterior precisa ser modificada para a forma canônica de Jordan. Suponha, por exemplo, que alguns polos ($p_i, i = 4, \dots, n$) sejam diferentes entre si, mas os três primeiros polos ($p_i, i = 1, 2, 3$) são iguais, ou seja, que $p_1 = p_2 = p_3$. Então, a forma fatorada de $Y(s)/U(s)$ resulta em:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4) (s + p_5) \dots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}\end{aligned}$$

Representação de funções de transferência no espaço de estados

A representação desse sistema no espaço de estados, na forma canônica de Jordan, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (26)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (27)$$

Exemplo 9.1

Considere o sistema dado por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Obtenha a representação no espaço de estados nas formas canônicas controlável, observável e diagonal.

Forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.1

Forma canônica observável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forma canônica diagonal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADOS E EXPONENCIAL DE MATRIZ

Solução da equação de estado homogênea

Considere a equação diferencial vetorial-matricial de um sistema autônomo (sem entradas)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (28)$$

onde $\mathbf{x}$ = é um vetor de ordem n , $\mathbf{A}$ = é uma matriz constante de ordem $n \times n$.

Em termos da matriz exponencial, a solução da Equação (28) pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad (29)$$

Como a matriz exponencial é muito importante na análise por espaço de estados de sistemas lineares, a seguir examinaremos alguns métodos para resolvê-la.

Teorema de Cayley-Hamilton

O teorema de Cayley-Hamilton é bastante útil na prova de teoremas que envolvem equações matriciais ou soluciona problemas que envolvem equações matriciais.

Sabendo que a equação característica de uma matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ é dada por:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

o teorema de Cayley-Hamilton estabelece que a matriz $\mathbf{A}$ satisfaz sua própria equação característica, ou seja:

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (30)$$

Esse teorema pode ser usado para resolver qualquer função matricial, incluindo a exponencial de matriz, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo Cayley-Hamilton

Calcule a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

A equação característica de $\mathbf{A}$ é

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2.5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2.5\lambda + 1 = 0$$

Multiplicando ambos lados da equação por λ^{-1} tem-se

$$\lambda - 2.5 + \lambda^{-1} = 0 \Rightarrow \lambda^{-1} = 2.5 - \lambda$$

Usando Cayley-Hamilton e aplicando $\mathbf{A}$ à equação característica, tem-se

$$\mathbf{A}^{-1} = 2.5\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que equivale à inversa de $\mathbf{A}$.

Função de matriz quadrada - Propriedade baseada em Cayley-Hamilton

Seja $f(\lambda)$ uma função polinomial no autovalor λ , então

$$f(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k, \quad i = 1, \dots, n$$

e pelo Teorema de Cayley-Hamilton

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{A}^k$$

Se os n autovalores de $\mathbf{A}$ forem distintos, teremos n equações em λ para determinar n coeficientes ($\alpha_k, k = 0, \dots, n-1$). No entanto, se nem todos autovalores de $\mathbf{A}$ forem distintos, possuiremos menos equações do que o necessário para computar os coeficientes α_k , nesse caso, pode-se fazer o uso das derivadas de $f(\lambda)$ com relação a λ .

Exemplo: Potência de matriz quadrada com autovalores distintos

Calcule a função $\mathbf{A}^4$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det(\lambda I - A) = \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Usando a propriedade do slide anterior:

$$\lambda^4 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \Rightarrow \begin{cases} 3^4 = \alpha_0 + \alpha_1 3 \\ 1^4 = \alpha_0 + \alpha_1 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81 = \alpha_0 + 3\alpha_1 \\ 1 = \alpha_0 + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 40, \\ \alpha_0 = -39 \end{cases}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\mathbf{A}^4 = -39\mathbf{I} + 40\mathbf{A} = -39 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 40 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Potência de matriz quadrada com autovalores múltiplos

Calcule a função $\mathbf{A}^{10}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Solução:

Usando a propriedade:

$$\lambda^{10} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \quad 10\lambda^9 = \alpha_1$$

Como $\lambda = 1$ isso implica em $\alpha_1 = 10$ e $\alpha_0 = -9$, e pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\mathbf{A}^{10} = -9\mathbf{I} + 10\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que equivale a $\mathbf{A}^{10}$.

Exemplo: Exponencial de matriz quadrada com autovalores distintos

Calcule a função $\exp(\mathbf{A}t)$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Sabendo que $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$, usando a propriedade, tem-se:

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \Rightarrow \begin{cases} e^{3t} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 3 \\ e^t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{e^{3t} - e^t}{2}, \\ \alpha_0 &= \frac{3e^t - e^{3t}}{2} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3e^t - e^{3t}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3e^t - e^{3t}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \left(\frac{e^{3t} - e^t}{2} \right) & 2 \left(\frac{e^{3t} - e^t}{2} \right) \\ 0 & \frac{e^{3t} - e^t}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo: Exponencial de matriz quadrada com autovalores múltiplos

Calcule a função $\exp(\mathbf{A}t)$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Solução:

Usando a propriedade:

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \quad te^{\lambda t} = \alpha_1$$

Como $\lambda = 1$ isso implica em $\alpha_1 = te^t$ e $\alpha_0 = (1 - t)e^t$, e pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= (1 - t)e^t \mathbf{I} + te^t \mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^t - te^t & 0 \\ 0 & e^t - te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^t & 2te^t \\ 0 & te^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}. \quad (31) \end{aligned}$$

Cálculo de e^{At} por diagonalização

Se a matriz $\mathbf{A}$ pode ser transformada na forma diagonal ($\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, em que $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal com os mesmos autovalores de $\mathbf{A}$), então e^{At} pode ser dada por:

$$e^{At} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (32)$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz de transformação que diagonaliza $\mathbf{A}$. No caso de $\mathbf{A}$ possuir apenas autovalores distintos e estiver escrita na forma canônica controlável, a matriz $\mathbf{P}$ que diagonaliza $\mathbf{A}$ é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por diagonalização

Por exemplo, considere a seguinte matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz $\mathbf{A}$ tem um autovalor em $\lambda = -1$ e outro em $\lambda = 3$. A matriz de transformação que vai transformar a matriz $\mathbf{A}$ na forma diagonal pode ser dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz $\mathbf{P}$ é:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por diagonalização

Assim podemos encontrar $e^{\mathbf{A}t}$ a partir de $e^{\mathbf{D}t}$:

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} \\&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 0.75e^{-t} + 0.25e^{3t} & -0.25e^{-t} + 0.25e^{3t} \\ -0.75e^{-t} + 0.75e^{3t} & 0.25e^{-t} + 0.75e^{3t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por transformada de Laplace

Outro método de cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ é dado pela transformada inversa de Laplace como segue:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Então, para obter $e^{\mathbf{A}t}$, primeiro inverta a matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Isso resulta em uma matriz cujos elementos são funções racionais em s .

Então, considere a transformada inversa de Laplace de cada elemento da matriz.

Exemplo 9.7

Considere a seguinte matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ usando 1) diagonalização e 2) transformada de Laplace.

Método 1. Os autovalores de $\mathbf{A}$ são 0 e -2 ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$). Uma matriz de transformação necessária $\mathbf{P}$ pode ser obtida como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Então, a partir da Equação (32), $e^{\mathbf{A}t}$ é obtida como segue:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.7

Método 2. Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por Cayley-Hamilton

Caso 1: $\mathbf{A}$ possui autovalores distintos.

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \quad (33)$$

em que, por Cayley-Hamilton, os coeficientes $\alpha_k(t)$ para $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ podem ser determinado por meio da solução do seguinte conjunto de n equações para o $\alpha_k(t)$:

$$\begin{aligned}\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t}\end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ e possui autovalores distintos, então o número de $\alpha_k(t)$ a ser determinado é n .

Cálculo de e^{At} por Cayley-Hamilton

Caso 2: o polinômio mínimo de A envolve raízes múltiplas.

Como um exemplo, considere o caso em que o polinômio mínimo de A possui três raízes iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) e possui outras raízes ($\lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_n$), todas elas distintas. Assim como no caso 1:

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (34)$$

cujos coeficientes $\alpha_k(t)$ para $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ podem ser determinados por:

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) + 3\alpha_3(t)\lambda_1 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} &= te^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_4 + \alpha_2(t)\lambda_4^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_4^{n-1} &= e^{\lambda_4 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2(t)\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Observe que as últimas equações são idênticas às obtidas para o caso de autovalores distintos, no entanto, as equações relacionadas aos autovalores múltiplos são obtidas aplicando-se uma derivada de ordem $k = 1, \dots, \ell - 1$ (em que ℓ é a multiplicidade) com relação ao autovalor múltiplo e dividindo-se por $k!$.

Exemplo 9.8

Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine $e^{\mathbf{A}t}$ utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton.

Solução:

Como a matriz $\mathbf{A}$ é triangular superior, os dois autovalores estão na diagonal principal: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$ e, portanto são distintos. Assim:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A}$$

em que $\alpha_0(t)$ e $\alpha_1(t)$ podem ser obtidos a partir de

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 = e^{\lambda_2 t}$$

substituindo os autovalores, tem-se

$$\alpha_0(t) = 1$$

$$\alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) = e^{-2t}$$

Resolvendo para $\alpha_0(t)$ e $\alpha_1(t)$, temos:

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

Então, $e^{\mathbf{A}t}$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solução das equações de estado não homogêneas

A equação de estado não homogênea (com entrada) descrita por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (35)$$

onde $\mathbf{x}$ =vetor n , $\mathbf{u}$ =vetor r , $\mathbf{A}$ = matriz constante $n \times n$, $\mathbf{B}$ = matriz constante $n \times r$ apresenta a seguinte solução

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (36)$$

que também pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (37)$$

onde $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$. A solução $\mathbf{x}(t)$ é claramente a soma de um termo que consiste na transição do estado inicial (solução da equação homogênea) e de um termo proveniente do vetor de entrada.

Exemplo 9.6

Obtenha a resposta temporal do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário que ocorre em $t = 0$, ou

$$u(t) = 1(t)$$

Para esse sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transição de estado $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ pode ser obtida por algum dos métodos apresentados, obtendo-se:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.6

A resposta ao degrau unitário é, então, obtida como:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Se o estado inicial for nulo, ou $\mathbf{x}(0) = 0$, então $\mathbf{x}(t)$ poderá ser simplificada para:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

CONTROLABILIDADE, OBSERVABILIDADE, ESTABILIZABILIDADE E DETECTABILIDADE

Controlabilidade completa de estado de sistemas de tempo contínuo

Considere o sistema de tempo contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (38)$$

Definição: Controlabilidade

O sistema descrito pela Equação (38) será dito de estado controlável em $t = t_0$ se for possível construir um sinal de controle não limitado que transfira o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo estado for controlável, então o sistema será considerado de estado completamente controlável.

Se o sistema for de estado completamente controlável, então, dado qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$, o posto (número de linhas ou colunas linearmente independentes) da matriz de controlabilidade

$$Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

deve ser n (n vetores-coluna linearmente independentes). No caso de sistemas com única entrada, a matriz de controlabilidade é quadrada e o teste é equivalente a verificar se o determinante da matriz de controlabilidade é **não nulo!** ($\det(Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \neq 0$)

Exemplos Controlabilidade

Exemplo 9.10. Considere o sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Como

$$Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0,$$

o sistema não é de estado completamente controlável.

Exemplo 9.11. Considere o sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Para esse caso,

$$Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\det(Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \neq 0,$$

O sistema é, portanto, de estado completamente controlável.

Se o sistema (38) estiver na forma de Jordan, ele é de estado completamente controlável se, e somente se,

- (1) não houver dois blocos de Jordan na matriz $\mathbf{J}$ associados ao mesmo autovalor,
- (2) os elementos de qualquer linha de $\mathbf{B}$ equivalente que correspondem à última linha de cada bloco de Jordan não forem todos nulos, e
- (3) os elementos de cada linha da matriz $\mathbf{B}$ equivalente que correspondem a autovalores distintos não forem todos nulos.

Exemplo 9.12

Os seguintes sistemas são de estado completamente controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.12

Os seguintes sistemas não são de estado completamente controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Sistema não controlável e estabilizabilidade

Definição: Estabilizabilidade

Para sistemas parcialmente controláveis, se os modos não controláveis forem estáveis e os modos instáveis forem controláveis, o sistema será considerado estabilizável.

Por exemplo, o sistema definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

não é de estado controlável. O modo estável que corresponde ao autovalor -1 não é controlável. O modo instável que corresponde ao autovalor 1 é controlável. Esse sistema pode ser feito estável pelo uso de uma realimentação apropriada. Assim, o sistema é estabilizável.

Observabilidade

Considere o sistema sem excitação (entrada $\mathbf{u}$ nula) descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (39)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (40)$$

Definição: Observabilidade

O sistema será considerado completamente observável se todo estado $\mathbf{x}(t_0)$ puder ser determinado pela observação de $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$.

- O sistema é, portanto, completamente observável se cada transição do estado puder afetar cada elemento do vetor de saída.
- O conceito de observabilidade é útil na solução de problemas de reconstrução de variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis, no menor intervalo possível de tempo.
- O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com o controle por realimentação de estado é que algumas das variáveis de estado não são acessíveis por medição direta, resultando ser necessário estimar a variável de estado não mensurável para construir os sinais de controle.
- É possível demonstrar que essas estimativas das variáveis de estado são possíveis se e somente se o sistema for completamente observável.

Observabilidade completa de sistemas de tempo contínuo

Se o sistema é completamente observável, então, dada a saída $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$, $\mathbf{x}(t)$ pode ser sempre determinado apenas se o posto da matriz de observabilidade

$$Obsv(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CA} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

for n , ou seja, tiver n vetores-coluna linearmente independentes. No caso de uma única saída, a matriz de observabilidade é quadrada e o teste é equivalente a verificar se o determinante da matriz de observabilidade dada acima **é não nulo!** ($\det(Obsv(\mathbf{A}, \mathbf{C})) \neq 0$).

Exemplo 9.14

Considere o sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é controlável e observável?

Solução:

Uma vez que o posto da matriz

$$Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é 2, ou seja, $\det(Ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \neq 0$) o sistema é de estado completamente controlável.

Para testar a condição de observabilidade, examine o posto da matriz de observabilidade:

$$Obsv(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

o posto de $Obsv(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ é 2, visto que o determinante é não nulo ($\det(Obsv(\mathbf{A}, \mathbf{C})) = 1 \neq 0$). Como consequências, o sistema é completamente observável.

Controlabilidade, Observabilidade e Função de Transferência

- A função de transferência não possui cancelamentos se e somente se o sistema for de estado completamente controlável e observável.
- Isso significa que a função de transferência que possui cancelamentos não carrega toda a informação que caracteriza a dinâmica do sistema.

Caso o sistemas (39),(40) estiver na forma de Jordan, podemos verificar se é completamente observável quando satisfaz as seguintes condições:

- (1) não houver dois blocos de Jordan na matriz $\mathbf{J}$ associados aos mesmos autovalores,
- (2) não houver colunas de $\mathbf{C}$ correspondentes à primeira coluna de cada bloco de Jordan, que são constituídas por elementos nulos, e
- (3) não houver colunas de $\mathbf{C}$ correspondentes a autovalores distintos, que são formados por elementos nulos.

Exemplo 9.16

Os seguintes sistemas são completamente observáveis.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.16

Os seguintes sistemas não são completamente observáveis.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Definição: Detectabilidade

Para um sistema parcialmente observável, se os modos não observáveis forem estáveis e os modos observáveis forem instáveis, o sistema será considerado detectável. Note que o conceito de detectabilidade é dual ao conceito de estabilizabilidade.

Exemplo:

Classifique o seguinte sistema como controlável, não controlável ou estabilizável, e observável, não observável ou detectável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Os slides dessa aula foram baseados em

- Ogata, Katsuhiko “Engenharia de Controle Moderno”. 5ª edição, Pearson, 2010. ISBN: 9788576058106:
 - **Capítulo 2** – Modelagem matemática de sistemas de controle;
 - **Capítulo 9** – Análise de sistemas de controle no espaço de estados.