

EA721 - Princípios de Controle e
Servomecanismo
Parte 7.4: Projeto de Controladores Digitais:
Controlador PID discreto

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Controlador PID discreto

O diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com o controlador $PID(z)$ é apresentado na Figura 12.25.

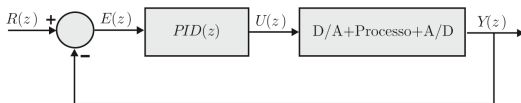


Figura 12.25 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com o controlador $PID(z)$.

A função de transferência do controlador PID de tempo contínuo tem três partes (Proporcional+Integral+Derivativa):

$$PID(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right). \quad (1)$$

Controlador PID discreto

Diversas aproximações podem ser empregadas para obter uma função de transferência em z a partir da função de transferência em s (1). A melhor aproximação para a parte integral é obtida com o método de Tustin, e a melhor aproximação para a parte derivativa é obtida com o método retangular para trás. Assim,

$$\begin{aligned}PID(s) &= K_c \left[1 + \frac{T}{2T_I} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{T_D}{T} \frac{(z-1)}{z} \right] \\&= K_c \left[1 + \frac{T}{2T_I} \frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})} + \frac{T_D}{T} (1-z^{-1}) \right] \\&= K_c \left[1 + \frac{T}{2T_I} \frac{(2-(1-z^{-1}))}{(1-z^{-1})} + \frac{T_D}{T} (1-z^{-1}) \right] \\&= K_c \left[1 - \frac{T}{2T_I} + \frac{T}{T_I} \frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{T_D}{T} (1-z^{-1}) \right] \\&= \bar{K}_c + \bar{K}_I \frac{1}{(1-z^{-1})} + \bar{K}_D (1-z^{-1})\end{aligned}\quad (2)$$

sendo $\bar{K}_c = K_c \left(1 - \frac{T}{2T_I}\right)$ o ganho proporcional, $\bar{K}_I = \frac{K_c T}{T_I}$ o ganho integral e $\bar{K}_D = \frac{K_c T_D}{T}$ o ganho derivativo.

Controlador PID discreto

A Equação (2) também pode ser escrita como

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\bar{K}_c + \bar{K}_I + \bar{K}_D - (\bar{K}_c + 2\bar{K}_D)z^{-1} + \bar{K}_D z^{-2}}{1 - z^{-1}}, \quad (3)$$

cuja equação de diferenças a ser implementada num programa de computador é

$$u(kT) = u[(k-1)T] + (\bar{K}_c + \bar{K}_I + \bar{K}_D) e(kT) - (\bar{K}_c + 2\bar{K}_D) e[(k-1)T] + \bar{K}_D e[(k-2)T]. \quad (4)$$

Observe que multiplicando-se a equação (3) por $\frac{z^2}{z^2}$ obtém-se uma razão entre um polinômio de segundo grau no numerador (ou seja, possui dois zeros) e o polinômio $(z^2 - 1)$ no denominador. Dessa forma, (3) pode ser reescrita como:

$$PID(z) = \frac{K(z + C_1)(z + C_2)}{z(z - 1)} = \frac{Kz^2 + K(C_1 + C_2)z + KC_1 C_2}{z(z - 1)}$$

Assim

$$K = \bar{K}_c + \bar{K}_I + \bar{K}_D, \quad K(C_1 + C_2) = -(\bar{K}_c + 2\bar{K}_D), \quad KC_1 C_2 = \bar{K}_D.$$

Exemplo 12.7

Deseja-se projetar um controlador $G_c(z)$ para o sistema da Figura 12.26 de modo que:

- o erro estacionário seja nulo para entrada $r(kT)$ do tipo degrau unitário e
- os polos de malha fechada dominantes tenham coeficiente de amortecimento $\xi = 0,5$ e frequência natural $\omega_n = 2(\text{rad/s})$.

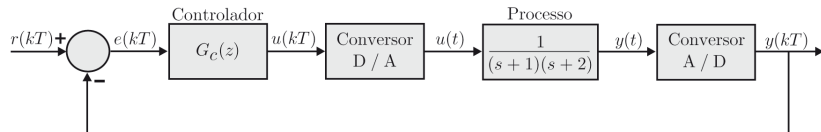


Figura 12.26 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Exemplo 12.7: Solução

Os polos de malha fechada dominantes devem estar localizados em

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -1 \pm \sqrt{3}j. \quad (5)$$

Se os polos dominantes tiverem influência predominante na dinâmica do sistema a resposta ao degrau deve apresentar um sobressinal próximo de $M_p \cong 16,3\%$ e um tempo de acomodação próximo de $t_s \cong 4s$ (critério de 2%).

O período T_d das oscilações do sinal de saída durante o transitório é dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cong 3,63s. \quad (6)$$

O período de amostragem T é escolhido como sendo pelo menos 10 vezes menor que o período das oscilações. Adotando $T = 0,4$, no plano z os polos correspondentes são mapeados em

$$z_{1,2} = e^{Ts_{1,2}} \cong 0,5158 \pm 0,4281j. \quad (7)$$

Exemplo 12.7: Solução

A função de transferência $G_p(z)$ do subsistema D/A + processo + A/D é dada por

$$\begin{aligned}G_p(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] \\&= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right] \\&= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{0,5}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{0,5}{s+2} \right] \\&= \frac{z-1}{z} \left[\frac{0,5z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{0,5z}{z-e^{-2T}} \right] \\&= \frac{0,0543z + 0,0364}{z^2 - 1,1196z + 0,3012} \\&= \frac{0,0543(z + 0,6703)}{(z - 0,4493)(z - 0,6703)}.\end{aligned}\tag{8}$$

Exemplo 12.7: Projeto por meio do lugar das raízes

Para que o sistema em malha fechada apresente o comportamento transitório desejado a função de transferência do controlador $G_c(z)$ deve ser calculada de modo que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechada desejados (8). Além disso, como a planta não possui integrador, para que o erro estacionário seja nulo para degrau em $r(kT)$ o controlador deve possuir um polo em $z = 1$. Essas especificações podem ser satisfeitas com o controlador PID:

$$G_c(z) = PID(z) = \bar{K}_c + \bar{K}_I \frac{1}{1 - z^{-1}} + \bar{K}_D(1 - z^{-1})$$

ou

(9)

$$G_c(z) = \frac{K(z + C_1)(z + C_2)}{z(z - 1)}$$
(10)

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(z) = G_c(z)G_p(z) = \frac{K(z + C_1)(z + C_2)}{z(z - 1)} \frac{0,0543(z + 0,6703)}{(z - 0,4493)(z - 0,6703)}$$
(11)

Exemplo 12.7: Projeto por meio do lugar das raízes

Cancelando um dos polos da planta ($C_2 = -0,6703$) as constantes C_1 e K podem ser calculadas por meio das condições de fase e módulo, respectivamente. Da condição de fase tem-se que

$$\angle G(z) = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ \quad (12)$$

Assim,

$$\angle z + C_1 + \angle z + 0,6703 - \angle z - \angle z - 1 - \angle z - 0,4493 = -180^\circ \quad (13)$$

A constante C_1 deve ser calculada num dos polos desejados $z_{1,2} \cong 0,5158 \pm 0,4281j$, ou seja,

$$\arctan \left(\frac{0,4281}{0,5158 + C_1} \right) \cong 59,54^\circ \Rightarrow C_1 \cong -0,2640. \quad (14)$$

Na Figura 12.27 é apresentado o gráfico do lugar das raízes. O valor de K em qualquer ponto do lugar das raízes pode ser calculado por meio da condição de módulo, ou seja,

$$|G(z)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{0,0543K(z - 0,2640)(z + 0,6703)}{z(z - 1)(z - 0,4493)} \right| = 1. \quad (15)$$

Exemplo 12.7: Projeto por meio do lugar das raízes

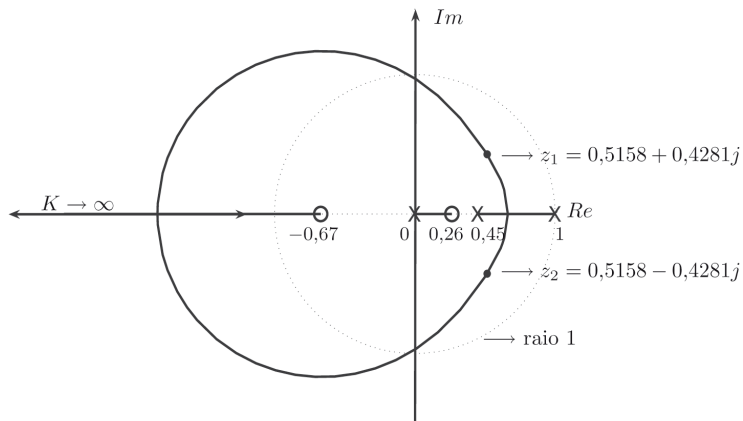


Figura 12.27 Lugar das raízes.

Exemplo 12.7: Projeto por meio do lugar das raízes

Substituindo um dos polos complexos de malha fechada $z_{1,2} \cong 0,5158 \pm 0,4281j$ na Equação (15), obtém-se

$$K = 5,5153. \quad (16)$$

Portanto, a função de transferência do controlador PID é dada por

$$G_c(z) = \frac{5,5153(z - 0,2640)(z - 0,6703)}{z(z - 1)}. \quad (17)$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1 + G(z)} \\ &= \frac{0,2997(z - 0,2640)(z + 0,6703)}{z(z - 1)(z - 0,4493) + 0,2997(z - 0,2640)(z + 0,6703)} \\ &= \frac{0,2997(z - 0,2640)(z + 0,6703)}{z^3 - 1,1496z^2 + 0,5711z - 0,0530}, \end{aligned} \quad (18)$$

cujos polos de malha fechada são $z_{1,2} \cong 0,5158 \pm 0,4281j$ e $z_3 \cong 0,1181$.

Exemplo 12.7: Resposta ao degrau

Escrevendo a Equação (18) com potências negativas de z , a função de transferência de malha fechada resulta como

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,2997z^{-1} + 0,1218z^{-2} - 0,0530z^{-3}}{1 - 1,1496z^{-1} + 0,5711z^{-2} - 0,0530z^{-3}} \quad (19)$$

Aplicando a transformada \mathcal{Z} inversa e a propriedade do atraso, obtém-se

$$y(kT) = 1,1496y[(k-1)T] - 0,5711y[(k-2)T] + 0,053y[(k-3)T] \\ + 0,2997r[(k-1)T] + 0,1218r[(k-2)T] - 0,053r[(k-3)T]. \quad (20)$$

Na Tabela 12.4 é apresentada a resposta $y(kT)$ quando $r(kT)$ é um degrau unitário. Note que o tempo de acomodação obtido está de acordo com o especificado ($t_s = 4s$ para o critério de 2%), e o sobressinal obtido ($M_p \cong 18,61\%$) também está próximo do especificado ($M_p \cong 16,3\%$).

Exemplo 12.7: Resposta ao degrau

Tabela 12.4 Resposta ao degrau $y(kT)$ para $kT = 0; 0,4; 0,8; 1,2; \dots; 4$

kT	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	...
$y(kT)$	0	0,2997	0,7660	1,0780	1,1861	...
...	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
...	1,1571	1,0784	1,0103	0,9754	0,9700	0,9801

Na Figura 12.28 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau $y(kT)$. Note que o erro estacionário é nulo, pois $e(\infty) = r(\infty) - y(\infty) = 0$.

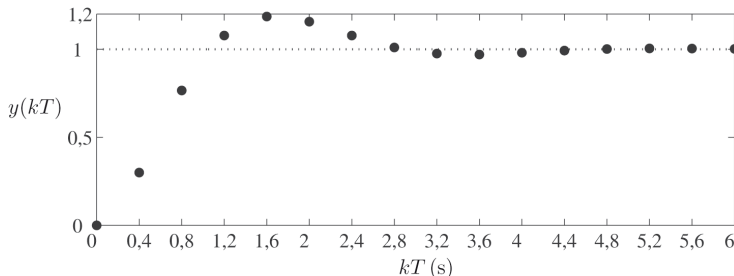


Figura 12.28 Resposta ao degrau unitário.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 12.**