

EA721 - Princípios de Controle e  
Servomecanismo  
Parte 7.3: Projeto de Controladores Digitais:  
Projeto de controlador no plano z

**Professora:** Cecília de Freitas Moraes

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

## Projeto de controlador no plano $z$

- A principal dificuldade dos projetos em  $z$  é a escolha dos polos de malha fechada, ou da região em que eles devem estar, para que resultem transientes aceitáveis com razoável robustez frente às variações da planta.
- Como as especificações de projeto são usualmente baseadas em índices de desempenho de respostas transitórias que possuem uma correspondência com os polos do plano  $s$  ( $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$ ), os polos do plano  $z$  podem ser obtidos por meio de um mapeamento dos polos em  $s$  (fazendo  $z = e^{sT}$ ).
- Em vez de discretizarmos via mapeamento polo-zero um controlador  $G_c(s)$  projetado para o par  $G_{so}(s) + G_p(s)$  (função de transferência do segurador de ordem zero + processo) agora iremos fazer diretamente o projeto de  $G_c(z)$  para o subsistema discreto equivalente a conversor D/A + processo + conversor A/D, ou seja, para  $G_p(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right]$ .

## Exemplo 12.6

Considere o sistema da Figura 12.21.

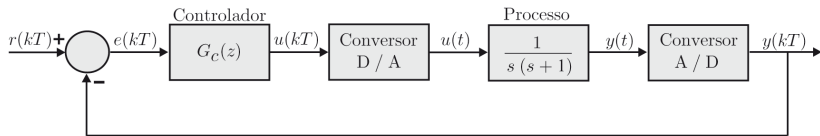


Figura 12.21 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Deseja-se projetar um controlador  $G_c(z)$  de modo que a resposta  $y(kT)$  para um degrau unitário na referência  $r(kT)$  tenha um sobressinal máximo  $M_p = 16,3\%$  e um tempo de pico  $t_p = 1s$ .

## Solução: Exemplo 12.6

O primeiro passo consiste em converter as especificações de projeto, baseadas em índices de desempenho da resposta temporal (sobressinal e tempo de pico), nos correspondentes polos de malha fechada do plano  $s$ . A seguir, os polos do plano  $s$  são mapeados no plano  $z$ .

A função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (1)$$

cujos polos de malha fechada são

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d. \quad (2)$$

Para que os polos de malha fechada possam ser determinados basta calcular os valores do coeficiente de amortecimento  $\xi$  e da frequência natural não amortecida  $\omega_n$ , que podem ser obtidos a partir do sobressinal  $M_p$  e do tempo de pico  $t_p$ , respectivamente. Assim,

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} 100\% = 16,3\% \Rightarrow \xi \cong 0,5. \quad (3)$$

## Solução: Exemplo 12.6

O tempo de pico  $t_p$  é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1\text{s} \Rightarrow \omega_d = \pi(\text{rad/s}). \quad (4)$$

Assim, a frequência natural não amortecida  $\omega_n$  vale

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - 0,5^2}} \Rightarrow \omega_n = 3,6276(\text{rad/s}) \quad (5)$$

O período  $T_d$  das oscilações do sinal de saída durante o transitório é dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\text{s}. \quad (6)$$

Na prática o período de amostragem  $T$  é escolhido como sendo pelo menos 10 vezes menor que o período das oscilações, ou seja,

$$T = \frac{T_d}{10} = 0,2\text{s}. \quad (7)$$

## Solução: Exemplo 12.6

Para que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações de projeto ( $M_p = 16,3\%$  e  $t_p = 1s$ ) os polos de malha fechada devem estar localizados em

$$s_{1,2} \cong -1,8138 \pm \pi j. \quad (8)$$

No plano  $z$  os polos correspondentes são mapeados em

$$z_{1,2} = e^{Ts_{1,2}} = e^{-1,8138T \pm \pi Tj} \cong 0,5629 \pm 0,4090j. \quad (9)$$

A função de transferência  $G_p(z)$  do subsistema D/A + processo + A/D é dada por

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right]. \quad (10)$$

$$= \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{-z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right)$$

$$= \left( -1 + \frac{T}{z-1} + \frac{z-1}{z-e^{-T}} \right)$$

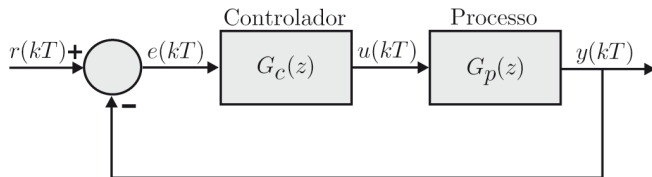
$$= \frac{z(e^{-T} - 1 + T) + 1 - e^{-T} - Te^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}. \quad (11)$$

Para  $T = 0,2s$  obtém-se

$$G_p(z) = \frac{z(e^{-T} - 1 + T) + 1 - e^{-T} - Te^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{0,0187(z + 0,9355)}{(z-1)(z - 0,8187)}. \quad (12)$$

## Solução: Exemplo 12.6

O diagrama de blocos do sistema discreto equivalente ao da Figura 12.21 é apresentado na Figura 12.22.



**Figura 12.22** Diagrama de blocos do sistema discreto.

Para o projeto do controlador  $G_c(z)$  podem ser utilizados os métodos do lugar das raízes ou da imposição algébrica de polos, que são idênticos aos do plano  $s$ , exceção feita ao limite da estabilidade, que no plano  $s$  é o eixo  $j\omega$ , e no plano  $z$  é a circunferência de raio unitário.

## Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

Nesta técnica de projeto calcula-se uma função de transferência para o controlador  $G_c(z)$  de modo que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechada desejados (9). Uma vez que isso ocorra o sistema em malha fechada irá apresentar o comportamento transitório desejado. As especificações de projeto podem ser satisfeitas por meio de um controlador de primeira ordem, com função de transferência

$$G_c(z) = \frac{K(z + C_1)}{z + C_2}. \quad (13)$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G_{ma}(z) = G_c(z)G_p(z) = \frac{K(z + C_1)}{(z + C_2)} \frac{0,0187(z + 0,9355)}{(z - 1)(z - 0,8187)} \quad (14)$$

Existem infinitos valores para  $K$ ,  $C_1$  e  $C_2$  que satisfazem às especificações de projeto. Uma solução é cancelar o zero do controlador com um polo da planta. Com isso os valores de  $C_2$  e  $K$  podem ser calculados por meio das condições de fase e módulo, respectivamente.

## Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

Assim, adotando  $C_1 = -0,8187$ , obtém-se

$$G_{ma}(z) = \frac{0,0187K(z + 0,9355)}{(z + C_2)(z - 1)}. \quad (15)$$

Da condição de fase, tem-se que

$$\angle G_{ma}(z) = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ, \quad (16)$$

ou seja,

$$\angle z + 0,9355 - \angle z + C_2 - \angle z - 1 = -180^\circ. \quad (17)$$

O valor de  $C_2$  deve ser calculado num dos polos de malha fechada  $z_{1,2} \cong 0,5629 \pm 0,4090j$ . Da Equação (17) obtém-se

$$\arctan\left(\frac{0,4090}{0,5629 + C_2}\right) \cong 58,37^\circ \Rightarrow C_2 \cong -0,3109. \quad (18)$$

## Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

Na Figura 12.23 é apresentado o gráfico do lugar das raízes.

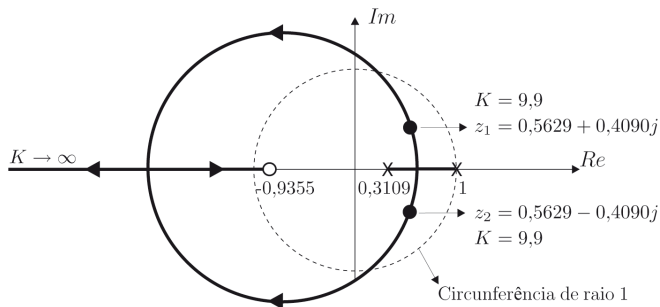


Figura 12.23 Lugar das raízes.

## Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

O valor de  $K$  pode ser calculado por meio da condição de módulo, ou seja,

$$|G_{ma}(z)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{0,0187K(z + 0,9355)}{(z - 0,3109)(z - 1)} \right| = 1. \quad (19)$$

Substituindo um dos polos complexos de malha fechada  $z_{1,2} \cong 0,5629 \pm 0,4090j$  na Equação (19), obtém-se

$$K \cong 9,9. \quad (20)$$

Portanto, a função de transferência do controlador é dada por

$$G_c(z) = \frac{9,9(z - 0,8187)}{z - 0,3109}. \quad (21)$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$\begin{aligned} G_{ma}(z) = G_c(z)G_p(z) &= \frac{9,9(z - 0,8187)}{z - 0,3109} \frac{0,0187(z + 0,9355)}{(z - 1)(z - 0,8187)} \\ &= \frac{0,1851z + 0,1732}{z^2 - 1,311z + 0,3108}. \end{aligned} \quad (22)$$

## Solução: Exemplo 12.6 - por meio de imposição algébrica de polos

Nesta técnica de projeto a função de transferência do controlador  $G_c(z)$  é calculada por meio de uma imposição algébrica de polos semelhante ao caso dos sistemas de tempo contínuo.

Os polos de malha fechada desejados (9) produzem o polinômio característico

$$\begin{aligned} F(z) &= (z - 0,5629 - 0,4090j)(z - 0,5629 + 0,4090j) \\ &= z^2 - 1,1258z + 0,48413714. \end{aligned} \quad (25)$$

A função de transferência do processo  $G_p(z)$  tem grau  $n = 2$ . O controlador  $G_c(z)$  deve ter grau  $m \geq n - 1$ . Assim, assumindo  $m = 1$ , a função de transferência do controlador é do tipo

$$G_c(z) = \frac{K(z + C_1)}{z + C_2}. \quad (26)$$

## Solução: Exemplo 12.6 - por meio de imposição algébrica de polos

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(z) = G_c(z)G_p(z) = \frac{K(z + C_1)}{(z + C_2)} \frac{0,0187(z + 0,9355)}{(z - 1)(z - 0,8187)}. \quad (27)$$

Supondo que o zero do controlador cancela o polo estável da planta, então

$$G(z) = \frac{0,0187K(z + 0,9355)}{(z + C_2)(z - 1)}. \quad (28)$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0,0187K(z + 0,9355)}{(z + C_2)(z - 1) + 0,0187K(z + 0,9355)} \\ &= \frac{0,0187K(z + 0,9355)}{z^2 + (0,0187K + C_2 - 1)z + 0,01749385K - C_2} \end{aligned} \quad (29)$$

cujo polinômio característico é

$$F(z) = z^2 + (0,0187K + C_2 - 1)z + 0,01749385K - C_2. \quad (30)$$

Comparando os polinômios (25) e (30), tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 0,0187 & 1 \\ 0,01749385 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1258 \\ 0,48413741 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se  $C_2 \cong -0,3109$  e  $K \cong 9,9$ . Portanto, a função de transferência do controlador é dada por

$$G_c(z) = \frac{9,9(z - 0,8187)}{z - 0,3109}, \quad (32)$$

que é a mesma obtida pelo método do lugar das raízes.

## Solução: Exemplo 12.6 - Resposta ao degrau

Substituindo os valores de  $G(z)$  a função de transferência de malha fechada resulta

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{G_{ma}(z)}{1 + G_{ma}(z)} = \frac{N_{ma}(z)}{D_{ma}(z) + N_{ma}(z)} = \\ &= \frac{0,1851z + 0,1732}{z^2 - 1,1258z + 0,4841} = \frac{0,1851z^{-1} + 0,1732z^{-2}}{1 - 1,1258z^{-1} + 0,4841z^{-2}}.\end{aligned}\quad (33)$$

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  inversa e a propriedade do atraso, obtém-se a seguinte equação de diferenças

$$\begin{aligned}y(kT) &= 1,1258y[(k-1)T] - 0,4841y[(k-2)T] \\ &\quad + 0,1851r[(k-1)T] + 0,1732r[(k-2)T].\end{aligned}\quad (34)$$

Sabendo-se que  $y(-0,2) = y(-0,4) = 0$  e que  $r(kT)$  é um degrau unitário, então os valores de  $y(kT)$  podem ser calculados por meio da implementação da Equação (34) num programa de computador. A seguir é apresentado o trecho de um programa, escrito na linguagem C, que calcula os valores da sequência  $y(kT)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .

# Solução: Exemplo 12.6 - Resposta ao degrau

Tabela 12.3 Programa e coeficientes para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$

```
yk_1=0;
yk_2=0;
rk_1=0;
rk_2=0;
for (k=0;k<=10;k++)
{
    if (k==1) rk_1=1;
    if (k==2) rk_2=1;
    yk =1.1258*yk_1-0.4841*yk_2+0.1851*rk_1+0.1732*rk_2;
    yk_2=yk_1;
    yk_1=yk;
}
```

$k$	$kT$	$y(kT)$
0	0,0	0
1	0,2	0,1851
2	0,4	0,5667
3	0,6	0,9067
4	0,8	1,1047
5	1,0	1,1630
6	1,2	1,1329
7	1,4	1,0707
8	1,6	1,0152
9	1,8	0,9829
10	2,0	0,9734

## Solução: Exemplo 12.6 - Resposta ao degrau

Na Figura 12.24 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau unitário  $y(kT)$  com o efeito de um segurador. Note que a resposta apresenta o sobressinal ( $M_p \cong 16,3\%$ ) e o tempo de pico ( $t_p = 1\text{s}$ ) de acordo com as especificações de projeto do controlador. Além disso, com o controlador  $G_c(z)$  foi possível reduzir o sobressinal e acelerar as respostas do sistema sem controlador apresentadas na Figura 12.20.

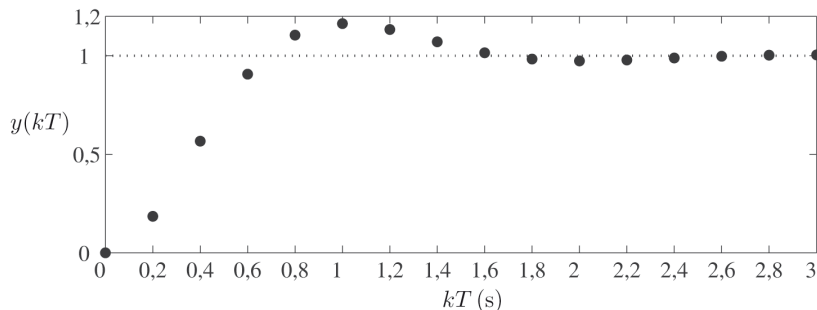


Figura 12.24 Resposta ao degrau unitário.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 12.**