

# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

## Parte 7.1: Projeto de Controladores Digitais: Introdução e Aproximações de tempo discreto

**Professora:** Cecília de Freitas Morais

e-mails: [cfmorais@unicamp.br](mailto:cfmorais@unicamp.br)

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

- A principal vantagem do controlador digital sobre o controlador contínuo é a flexibilidade de implementação.
- Como os controladores contínuos são implementados por meio de componentes eletrônicos, a complexidade desses controladores depende da complexidade e da precisão dos componentes.
- Já os controladores digitais são implementados na forma de programas, sendo portanto igualmente fácil implementar controladores simples ou complexos, além do que mudanças nas leis de controle também são muito mais simples de serem realizadas.
- Os controladores digitais são modeláveis, a menos de pequenas imprecisões nas amplitudes dos sinais, por meio de sistemas de tempo discreto e suas funções de transferência em  $z$ .

- Basicamente, o projeto de controladores de tempo discreto pode ser realizado de duas formas:
  - i) por aproximações discretas do projeto realizado no domínio contínuo por meio da transformada de Laplace – essa técnica implica obter funções de transferência em  $z$ , aproximadas a partir de funções de transferência em  $s$ . Neste caso serão apresentados os métodos: aproximação retangular para a frente e para trás, transformação bilinear ou de Tustin e mapeamento polo-zero.
  - ii) diretamente no domínio discreto por meio da transformada  $\mathcal{Z}$  – essa técnica pode ser realizada pelo método do lugar das raízes e pelo método algébrico diretamente na variável  $z$ .

## Aproximações de tempo discreto

Deseja-se obter um sistema discreto que represente aproximadamente um sistema contínuo. Considere, por simplicidade, a função de transferência de um integrador:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}. \quad (1)$$

A equação diferencial que representa a função de transferência (1) é

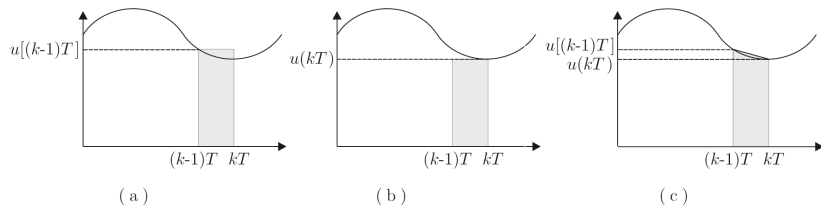
$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t). \quad (2)$$

Integrando ambos os membros da Equação (2) num período de amostragem  $T$  qualquer, ou seja, de  $(k-1)T$  a  $kT$ , obtém-se

$$y(kT) - y[(k-1)T] = \int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt. \quad (3)$$

# Aproximações de tempo discreto

Há vários métodos numéricos para integrar o segundo membro da Equação (3). Alguns deles são mostrados nas Figuras 12.1 (a), (b) e (c).



**Figura 12.1** Métodos numéricos de integração. (a) Retangular para a frente. (b) Retangular para trás. (c) Trapézio.

## Retangular para a frente

Neste método o cálculo da integral é aproximado pela área de um retângulo, cujo comprimento de um dos lados é igual ao período de amostragem  $T$  e o comprimento do outro é igual ao valor da função no instante  $(k-1)T$ , conforme mostrado na Figura 12.1 (a). Fazendo esta aproximação na Equação (3), obtém-se

$$y(kT) - y[(k-1)T] = Tu[(k-1)T]. \quad (4)$$

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  na Equação (4), obtém-se

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = Tz^{-1}U(z). \quad (5)$$

Logo,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{z - 1} = \frac{1}{\frac{z-1}{T}}. \quad (6)$$

Portanto, a função de transferência do sistema discreto (6) se obtém da função de transferência do sistema contínuo (1) simplesmente fazendo a troca de variável<sup>1</sup>

$$s = \frac{z - 1}{T}. \quad (7)$$

---

<sup>1</sup>Prova-se que esta transformação também é válida para sistemas de ordem superior.

# Retangular para a frente

Para um sistema contínuo qualquer ser estável, seus polos devem estar localizados no semiplano esquerdo aberto do plano  $s$ . Este semiplano se caracteriza por

$$\Re(s) < 0 \Rightarrow \Re\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0. \quad (8)$$

Como  $T > 0$ , então

$$\Re(z) < 1. \quad (9)$$

Portanto, a transformação (7) pode fazer com que polos localizados no semiplano esquerdo do plano  $s$  sejam mapeados fora do círculo unitário, fazendo com que o sistema discreto resultante seja instável (Figura 12.2).



Figura 12.2 Mapeamento do plano  $s$  no plano  $z$  com a aproximação retangular para a frente.

## Retangular para trás

Neste método o cálculo da integral é aproximado pela área de um retângulo, cujo comprimento de um dos lados é igual ao período  $T$  e o comprimento do outro é igual ao valor da função no instante  $kT$ , conforme mostrado na Figura 12.1 (b). Fazendo esta aproximação na Equação (3), obtém-se

$$y(kT) - y[(k-1)T] = Tu(kT). \quad (10)$$

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  na Equação (10), obtém-se

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = TU(z). \quad (11)$$

Logo,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz}{z - 1} = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz}}. \quad (12)$$

As Equações (1) e (12) são equivalentes se

$$s = \frac{z - 1}{Tz}. \quad (13)$$

## Retangular para trás

Se um sistema contínuo qualquer é estável seus polos devem estar localizados no semiplano esquerdo aberto do plano  $s$ . Da Equação (13) tem-se que

$$\Re(s) < 0 \Rightarrow \Re\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0. \quad (14)$$

Escrevendo  $z$  em coordenadas retangulares, isto é,  $z = \sigma + j\omega$  e como  $T > 0$ , então

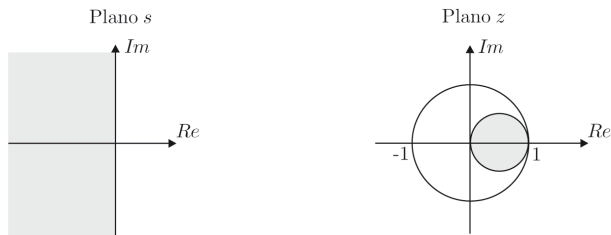
$$\Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right) < 0 \Rightarrow \Re\left[\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)}\right] < 0 \quad (15)$$

ou

$$\Re\left(\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2 + j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}\right) < 0 \Rightarrow \sigma^2 - \sigma + \omega^2 < 0 \Rightarrow (\sigma - 0,5)^2 + \omega^2 < 0,5^2. \quad (16)$$

# Retangular para trás

Portanto, a transformação (13) mapeia o semiplano esquerdo do plano  $s$  num círculo com centro em  $z = 0,5$  e raio igual a  $0,5$ . Conforme é mostrado na Figura 12.3, a integração retangular para trás não oferece perigo de instabilizar indevidamente um sistema estável.



**Figura 12.3** Mapeamento do plano  $s$  no plano  $z$  com a aproximação retangular para trás.

# Transformação bilinear ou método de Tustin

Neste método o cálculo da integral é aproximado pela área de um trapézio, cuja altura é igual ao período  $T$  e cujas bases correspondem aos valores da função nos instantes  $kT$  e  $(k-1)T$ , conforme mostrado na Figura 12.1 (c). Fazendo esta aproximação na Equação (3), obtém-se

$$y(kT) - y[(k-1)T] = T \left( \frac{u(kT) + u[(k-1)T]}{2} \right). \quad (17)$$

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  na Equação (17), obtém-se

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = T \left( \frac{U(z) + z^{-1}U(z)}{2} \right). \quad (18)$$

Logo,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} = \frac{1}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}. \quad (19)$$

As Equações (1) e (19) são equivalentes se

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}. \quad (20)$$

# Transformação bilinear ou método de Tustin

Se um sistema contínuo qualquer é estável seus polos devem estar localizados no semiplano esquerdo aberto no plano  $s$ . Da Equação (20) tem-se que

$$\Re(s) < 0 \Rightarrow \Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0. \quad (21)$$

Escrevendo  $z$  em coordenadas retangulares, isto é,  $z = \sigma + j\omega$  e como  $T > 0$ , então

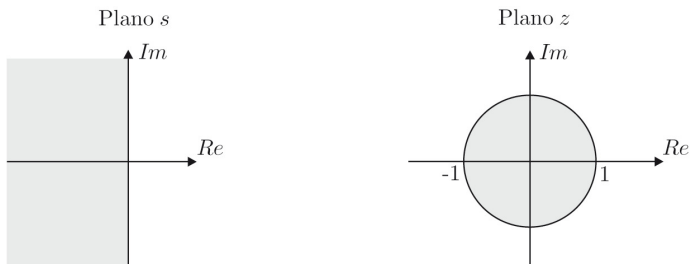
$$\Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) < 0 \Rightarrow \Re\left[\frac{(\sigma - 1 + j\omega)(\sigma + 1 - j\omega)}{(\sigma + 1 + j\omega)(\sigma + 1 - j\omega)}\right] < 0 \quad (22)$$

ou

$$\Re\left(\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + 2j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}\right) < 0 \Rightarrow \sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 \Rightarrow \sigma^2 + \omega^2 < 1. \quad (23)$$

# Transformação bilinear ou método de Tustin

Portanto, a transformação (20) mapeia no plano  $z$  um círculo com centro na origem e raio igual a 1, conforme mostrado na Figura 12.4. Embora nesta transformação o semiplano esquerdo de  $s$  seja mapeado exatamente no círculo unitário do plano  $z$ , a mesma pode ocasionar uma distorção na resposta em frequência quando comparada ao sistema contínuo. Para compensar esta distorção (*prewarping*) pode-se usar a transformação bilinear da seção seguinte.



**Figura 12.4** Mapeamento do plano  $s$  no plano  $z$  com a aproximação de Tustin.

## Transformação bilinear com compensação de *prewarping*

Fazendo  $s = j\omega_s$  e  $z = e^{j\omega T}$ , a transformação (20) no domínio da frequência fica expressa por

$$j\omega_s = \frac{2(e^{j\omega T} - 1)}{T(e^{j\omega T} + 1)} = \frac{2(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})} = \frac{2}{T} \left( \frac{2j\text{sen}\frac{\omega T}{2}}{2\cos\frac{\omega T}{2}} \right) = j\frac{2}{T} \tan\frac{\omega T}{2}. \quad (24)$$

Logo,

$$\omega_s = \frac{2}{T} \tan\frac{\omega T}{2}, \quad (25)$$

ou seja, a frequência do sistema contínuo  $\omega_s$  é mapeada em  $\frac{2}{T} \tan\frac{\omega T}{2}$  no sistema discreto. Esta distorção em frequência é denominada *prewarping*. Note que em baixas frequências, ou para  $\omega T$  pequeno, as frequências dos sistemas contínuo e discreto são próximas, pois

$$\omega_s = \frac{2}{T} \tan\frac{\omega T}{2} \approx \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} \approx \omega. \quad (26)$$

Como não é possível compensar essa distorção em todas as frequências costuma-se ajustar apenas a frequência crítica do sistema, como, por exemplo, no limite superior da faixa de passagem.

# Transformação bilinear com compensação de *prewarping*

Considere, por simplicidade, a função de transferência de primeira ordem

$$G(s) = \frac{a}{s + a}. \quad (27)$$

Se, por exemplo, a frequência crítica da função (27) for a frequência do polo ( $\omega_s = a$ ), então a função de transferência é ajustada para

$$G(s) = \frac{\frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}}{s + \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}}. \quad (28)$$

Note que o numerador da Equação (28) também foi ajustado para que o ganho em baixas frequências permaneça o mesmo. Aplicando-se a transformação bilinear (20) em (28), obtém-se o sistema discreto com compensação de distorção em frequência

$$G(z) = \frac{\frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}}. \quad (29)$$

## Transformação bilinear com compensação de *prewarping*

Pode-se mostrar que na frequência crítica adotada ( $\omega_s = \omega = a$ ) os módulos dos sistemas contínuo e discreto são iguais, ou seja,

$$\left| \frac{a}{ja + a} \right| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (30)$$

e

$$\left| \frac{\frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}}{\frac{2(e^{jaT}-1)}{T(e^{jaT}+1)} + \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}} \right| = \left| \frac{\tan \frac{aT}{2}}{j \tan \frac{aT}{2} + \tan \frac{aT}{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (31)$$

## Exemplo 12.1

Dada a função de transferência do sistema contínuo

$$G(s) = \frac{2}{s+2}, \quad (32)$$

determine a função de transferência do sistema discreto usando a transformação bilinear com e sem compensação de distorção em frequência. No caso da transformação com compensação deseja-se que o sistema discreto tenha o mesmo módulo que o sistema contínuo na frequência  $\omega = 2$  rad/s. Suponha um período de amostragem  $T = 1$ s.

No caso da transformação bilinear sem compensação basta substituir diretamente a aproximação (20) em  $G(s)$ , obtendo

$$G(z) = \frac{2}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 2} = \frac{1}{\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z+1}{2z}. \quad (33)$$

No caso da transformação bilinear com compensação, a função  $G(s)$  deve ser modificada para

$$G(s) = \frac{\frac{2}{T} \tan \frac{2T}{2}}{s + \frac{2}{T} \tan \frac{2T}{2}} = \frac{\frac{2}{T} \tan T}{s + \frac{2}{T} \tan T} = \frac{2 \tan 1}{s + 2 \tan 1}. \quad (34)$$

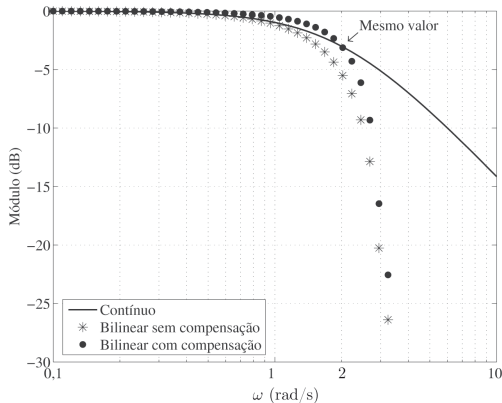
## Exemplo 12.1

Aplicando a transformação bilinear (20) na Equação (34), obtém-se

$$\begin{aligned}G(z) &= \frac{2 \tan 1}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 2 \tan 1} \\&= \frac{\tan 1}{\frac{z-1}{z+1} + \tan 1} \\&= \frac{(z+1) \tan 1}{(\tan 1 + 1)z + \tan 1 - 1} \\&= \frac{\tan 1}{(\tan 1 + 1)} \left( \frac{z+1}{z + \frac{\tan 1 - 1}{\tan 1 + 1}} \right) \\&\approx \frac{0,6090(z+1)}{z + 0,2180}.\end{aligned}\tag{35}$$

## Exemplo 12.1

Na Figura 12.5 é apresentada a resposta em frequência do sistema contínuo (32) e dos sistemas discretos (33) e (35). Note que o sistema discreto com compensação possui o mesmo módulo que o sistema contínuo na frequência  $\omega = 2\text{rad/s}$ .



**Figura 12.5**  $|G(j\omega)|$  do sistema contínuo (12.32) e  $|G(e^{j\omega T})|$  dos sistemas discretos (12.33) e (12.35).

# Mapeamento polo-zero

O método consiste em mapear os polos e zeros da função de transferência  $G(s)$  no plano  $z$ , através da relação  $z = e^{sT}$ . Inicialmente deve-se fatorar  $G(s)$  na forma de polos e zeros, ou seja,

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (36)$$

sendo  $n$  o número de polos, e  $m$  o número de zeros.

Um polo de  $G(s)$  em  $s = p_n$  é mapeado no plano  $z$  em  $z = e^{p_n T}$ , e um zero finito de  $G(s)$  em  $s = z_m$  é mapeado no plano  $z$  em  $z = e^{z_m T}$ .

## Mapeamento polo-zero

Quando o número de zeros de  $G(s)$  é menor que o número de polos ( $m < n$ ),  $G(s)$  possui zeros no infinito, que são mapeados em  $z = -1$ . A explicação para este fato é que conforme um ponto do eixo  $j\omega$  varia de 0 a  $\pi/T$  no plano  $s$  o mesmo varia de ( $z = e^{j0} = 1$ ) até ( $z = e^{j\pi} = -1$ ) no plano  $z$ , ou seja, o ponto  $z = -1$  representa a maior frequência possível da função de transferência discreta. Para compensar este efeito acrescentam-se  $(n - m - 1)$  fatores de  $(z + 1)$  no numerador da função transferência discreta  $G(z)$ .

Por último, deve-se ajustar o ganho de  $G(z)$ . Este ajuste pode ser feito para qualquer frequência crítica de  $G(s)$ . Normalmente o ganho é ajustado para que em baixas frequências o ganho do sistema contínuo seja igual ao do sistema discreto, ou seja,

$$G(s)|_{s=0} = G(z)|_{z=1}. \quad (37)$$

## Exemplo 12.2

Dada a função de transferência do sistema contínuo

$$G(s) = \frac{2}{s+2}, \quad (38)$$

determine a função de transferência do sistema discreto usando o método do mapeamento polo-zero. Suponha um período de amostragem  $T = 1s$ .

O polo em  $s = -2$  é mapeado em  $z = e^{-2T}$ . O sistema  $G(s)$  possui um polo ( $n = 1$ ) e nenhum zero finito ( $m = 0$ ). Como  $n - m - 1 = 0$ , então não é necessário acrescentar fatores de  $(z + 1)$  no numerador do sistema discreto.

Logo, a função de transferência do sistema discreto é dada por

$$G(z) = \frac{K}{z - e^{-2T}} = \frac{K}{z - 0,1353}. \quad (39)$$

O ganho  $K$  é ajustado para que em baixas frequências o ganho do sistema contínuo  $G(s)$  seja igual ao do sistema discreto  $G(z)$ , ou seja,

$$G(s)|_{s=0} = G(z)|_{z=1} \Rightarrow 1 = \frac{K}{1 - 0,1353} \Rightarrow K \cong 0,8647. \quad (40)$$

Portanto,

$$G(z) = \frac{0,8647}{z - 0,1353}. \quad (41)$$

## Exemplo 12.3

Dada a função de transferência do sistema contínuo

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}, \quad (42)$$

determine a função de transferência do sistema discreto usando o método do mapeamento polo-zero. Suponha um período de amostragem  $T = 1s$ .

O zero  $s = -1$  é mapeado em  $z = e^{-T}$ . Os polos em  $s = -2$ ,  $s = -3$  e  $s = -4$  são mapeados, respectivamente, em  $z = e^{-2T}$ ,  $z = e^{-3T}$  e  $z = e^{-4T}$ .

O sistema  $G(s)$  possui três polos ( $n = 3$ ) e um zero finito ( $m = 1$ ). Como  $n - m - 1 = 1$ , então é necessário acrescentar um fator de  $(z + 1)$  no numerador do sistema discreto.

Logo, a função de transferência do sistema discreto é dada por

$$G(z) = \frac{K(z - e^{-T})(z + 1)}{(z - e^{-2T})(z - e^{-3T})(z - e^{-4T})} = \frac{K(z - 0,3679)(z + 1)}{(z - 0,1353)(z - 0,0498)(z - 0,0183)}. \quad (43)$$

O ganho  $K$  é ajustado para que em baixas frequências o ganho do sistema contínuo  $G(s)$  seja igual ao do sistema discreto  $G(z)$ , ou seja,

$$G(s)|_{s=0} = G(z)|_{z=1} \Rightarrow \frac{2}{24} = \frac{K(1 - 0,3679)(1 + 1)}{(1 - 0,1353)(1 - 0,0498)(1 - 0,0183)} \Rightarrow K \approx 0,0532. \quad (44)$$

Portanto,

$$G(z) = \frac{0,0532(z - 0,3679)(z + 1)}{(z - 0,1353)(z - 0,0498)(z - 0,0183)}. \quad (45)$$

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 12.**