

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 6.2: Mapeamento do plano s em z ,
subsistema DA + processo + AD,
Análise da malha fechada, Estabilidade

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Mapeamento do plano s no plano z

Considere o processo de amostragem de um conversor A/D ideal, conforme representado na Figura 11.7.

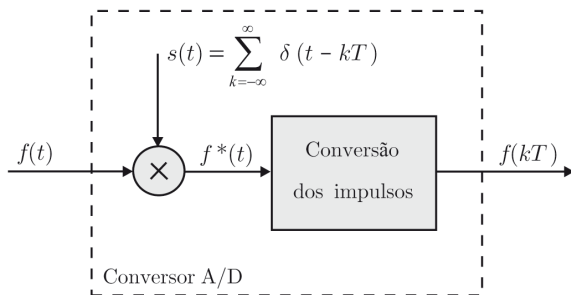


Figura 11.7 Conversor A/D ideal.

Mapeamento do plano s no plano z

O sinal contínuo $f(t)$ é modulado por um trem de impulsos $s(t)$, produzindo o sinal amostrado $f^*(t)$, que depois é convertido para a sequência discreta $f(kT)$. Da Figura 11.7 tem-se que

$$f^*(t) = f(t)s(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT), \quad (1)$$

sendo $\delta(t - kT)$ a função delta de Dirac.

- O sinal amostrado $f^*(t)$ é definido para todo $t \geq 0$, sendo igual a zero para $kT < t < (k + 1)T$ e diferente de zero nos instantes de amostragem $t = kT$.
- Já o sinal discreto $f(kT)$ assume valor apenas em $t = kT$, pois não é definido em $t \neq kT$.

Mapeamento do plano s no plano z

A transformada de Laplace de $f^*(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\mathcal{L}[\delta(t - kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}. \quad (2)$$

Definindo $z = e^{Ts}$, a Equação (2) resulta na definição de transformada \mathcal{Z} , ou seja,

$$F^*(s)|_{z=e^{Ts}} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}. \quad (3)$$

Da Equação (3) conclui-se que a mudança de variável $z = e^{Ts}$ representa um procedimento alternativo para a definição da transformada \mathcal{Z} . Além disso, essa mudança estabelece relações geométricas interessantes entre o plano s e o plano z .

Mapeamento do plano s no plano z

Supondo $s = \sigma + j\omega$, com σ e ω reais, então

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} \cos(\omega T) + je^{\sigma T} \sin(\omega T). \quad (4)$$

Logo,

$$|z| = \sqrt{e^{2\sigma T} \cos^2(\omega T) + e^{2\sigma T} \sin^2(\omega T)} \Rightarrow |z| = e^{\sigma T}, \quad (5)$$

$$\tan(\angle z) = \frac{e^{\sigma T} \sin(\omega T)}{e^{\sigma T} \cos(\omega T)} = \tan(\omega T) \Rightarrow \angle z = \omega T. \quad (6)$$

Das Equações (5) e (6) conclui-se que:

- Para $\sigma = 0$, no plano s temos $s = j\omega$ que corresponde ao o eixo imaginário, enquanto no plano z temos $|z| = 1$ que corresponde à circunferência de raio unitário;
- Para $\sigma < 0$, no plano s temos o semiplano esquerdo (parte real negativa onde estão alocados os polos estáveis de uma função de transferência), enquanto no plano z temos $|z| < 1$ que corresponde ao interior da circunferência de raio unitário com centro na origem (onde estarão alocados os polos estáveis em tempo discreto).

Mapeamento do plano s no plano z

Na Figura 11.18 é apresentado o mapeamento do plano s no plano z .

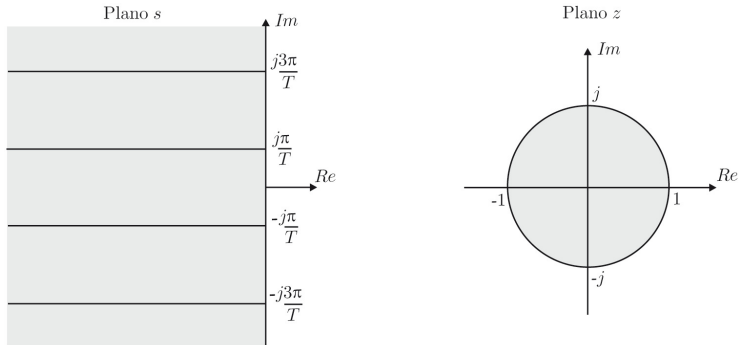


Figura 11.18 Mapeamento do plano s no plano z .

Subsistema D/A + processo + A/D

No projeto de sistemas de controle digital é conveniente representar o subsistema D/A + processo + A/D por meio da transformada \mathcal{Z} . Note que não é possível descrever **separadamente**, por meio da transformada \mathcal{Z} , blocos como o conversor D/A, o processo e o conversor A/D, já que os sinais envolvidos no processo são analógicos (dependem de $t \in \mathbb{R}$) e, no caso dos conversores, os sinais são analógicos ($t \in \mathbb{R}$) e digitais ($k \in \mathbb{N}$). No entanto, **o conjunto** desses três blocos tem entrada e saída discretas (Figura 11.19) e pode, portanto, ser tratado como um único sistema discreto pela transformada \mathcal{Z} (Figura 11.20). Deve-se observar que para valer a representação da Figura 11.20 é necessário considerar que o processo e as operações de conversão são lineares.

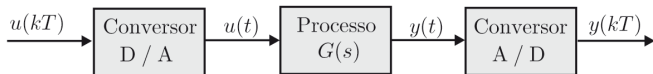


Figura 11.19 Subsistema D/A + processo + A/D.

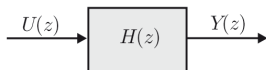


Figura 11.20 Representação simplificada.

Subsistema D/A + processo + A/D

A ideia é calcular a função de transferência $H(z)$ do subsistema por meio da sua resposta impulsiva. Sendo $u(kT)$ um impulso unitário, a saída $u(t)$ do conversor D/A de ordem zero é um pulso, conforme representado na Figura 11.21.

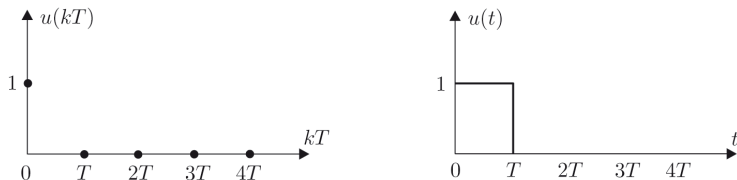


Figura 11.21 Impulso $u(kT)$ e saída pulso $u(t)$.

Subsistema D/A + processo + A/D

A transformada de Laplace da saída pulso $u(t)$ é calculada abaixo (diferença entre a transformada de um degrau ($d(t)$) e um degrau deslocado ($d(t - T)$):

$$U(s) = \mathcal{L}[d(t)] - \mathcal{L}[d(t - T)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (7)$$

portanto, a transformada de Laplace de $u(t)$ é dada por

$$U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (8)$$

A saída do processo é, portanto,

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{(1 - e^{-sT})}{s}. \quad (9)$$

Subsistema D/A + processo + A/D

A transformada \mathcal{Z} de $y(kT)$ é

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[Y(s)] = \mathcal{Z}\left[G(s) \frac{(1 - e^{-sT})}{s}\right].$$

Lembrando que $z = e^{sT}$, ou seja $z^{-1} = e^{-sT}$ e que a transformada \mathcal{Z} é uma operação linear, obtém-se

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]. \quad (10)$$

Como $u(kT)$ é um impulso unitário ($U(z) = 1$), então

$$Y(z) = H(z)U(z) = H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]. \quad (11)$$

Concluindo, para determinar a função de transferência $H(z)$ do subsistema **D/A + processo + A/D** basta calcular:

- $\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$, onde $G(s)$ é a função de transferência do processo dinâmico;
- $H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$.

Exemplo 11.2

Considere o subsistema da Figura 11.22 e calcule a função de transferência $H(z)$ equivalente.



Figura 11.22 Subsistema D/A + processo + A/D.

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Da tabela,

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{z}{z-1}, \quad \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \frac{z}{z - e^{-T}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} H(z) &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}} \right) = 1 - \frac{z-1}{z - e^{-T}} \\ &= \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}. \end{aligned}$$

Análise da malha fechada

O diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com realimentação unitária e controle discreto é apresentado na Figura 11.23.

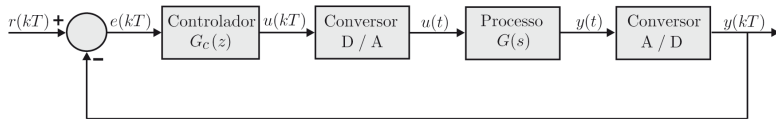


Figura 11.23 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com controle discreto.

Conforme foi visto na seção anterior o subsistema D/A + processo + A/D pode ser representado pela função de transferência discreta $H(z)$ dada pela Equação (11). Assim, o diagrama de blocos simplificado do sistema discreto em malha fechada pode ser representado através da Figura 11.24.

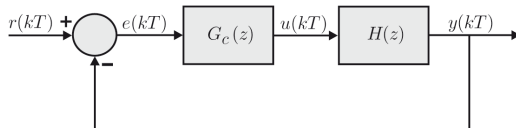


Figura 11.24 Diagrama de blocos simplificado do sistema discreto em malha fechada.

Análise da malha fechada

Sendo $R(z) = \mathcal{Z}[r(kT)]$ e $Y(z) = \mathcal{Z}[y(kT)]$, a função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)H(z)}{1 + G_c(z)H(z)}. \quad (13)$$

A função de transferência $G_c(z)$ do controlador pode ser genericamente representada por

$$\begin{aligned} G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0}{z^q + a_{q-1} z^{q-1} + \dots + a_0} \cdot \frac{z^{-q}}{z^{-q}} \\ &= \frac{b_p z^{-q+p} + b_{p-1} z^{-q+p-1} + \dots + b_0 z^{-q}}{1 + a_{q-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-q}}, \end{aligned} \quad (14)$$

sendo b_0, b_1, \dots, b_p e a_0, \dots, a_{q-1} constantes, com $p \leq q$.

Dado o sinal de referência $r(kT)$, os cálculos dos sinais de erro $e(kT)$ e da ação de controle $u(kT)$ podem ser implementados num algoritmo de "computador" por meio das seguintes equações de diferenças:

$$e(kT) = r(kT) - y(kT), \quad (15)$$

$$u(kT) = -a_{q-1} u[(k-1)T] - \dots - a_0 u[(k-q)T] + b_p e[(k-q+p)T] + b_{p-1} e[(k-q+p-1)T] + \dots + b_0 e[(k-q)T]. \quad (16)$$

Definição 11.1

Um sistema é BIBO^a estável se toda sequência de entrada de amplitude limitada produz uma sequência de saída de amplitude limitada.

^a*bounded input - bounded output*

No caso de sistemas lineares e invariantes no tempo a BIBO estabilidade pode ser caracterizada pela resposta impulsiva do sistema, conforme o seguinte lema.

Lema 11.1

Um sistema discreto, linear e invariante no tempo, com resposta impulsiva $g(k)$ é BIBO estável se e somente se sua resposta impulsiva é absolutamente somável, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty. \quad (17)$$

Exemplo 11.3

O sistema

$$G(z) = \frac{z}{z-1} \quad (18)$$

tem como resposta impulsiva o degrau unitário que é mostrado na Figura 11.25.

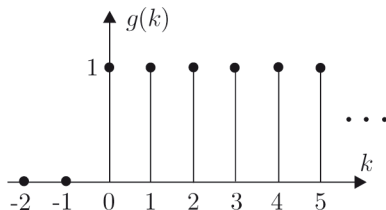


Figura 11.25 Sequência degrau unitário.

Exemplo 11.3

A transformada inversa de $G(z)$ é dada por

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = g(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty. \quad (20)$$

Do Lema 11.1 conclui-se que o sistema $G(z)$ é instável. De fato, considerando que $G(z)$ representa um integrador, aplicando uma entrada de amplitude limitada, por exemplo do tipo degrau, a saída será uma rampa, que não é limitada.

Outro teste para a estabilidade BIBO, normalmente mais útil nas aplicações, é expresso em termos da função de transferência em estudo, apresentado no teorema a seguir.

Teorema 11.2

Um sistema linear, discreto e invariante no tempo, com função de transferência $G(z)$, é BIBO estável se e somente se todos os polos de $G(z)$ têm módulo estritamente menor que 1, ou seja, estão localizados estritamente dentro do círculo de raio unitário.

Exemplo 11.4

O sistema

$$G(z) = \frac{z}{z-1} \quad (21)$$

é instável, pois possui um polo em $z = 1$ que não está localizado estritamente dentro do círculo de raio unitário (o polo de $G(z)$ não é estritamente menor que 1).

Exemplo 11.5

Dado o sistema

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 1,8z + 1,62}. \quad (22)$$

Os polos de $G(z)$ são as raízes do polinômio do denominador

$$z^2 - 1,8z + 1,62 = 0. \quad (23)$$

Logo,

$$\begin{cases} z_1 = 0,9 + 0,9j, \\ z_2 = 0,9 - 0,9j. \end{cases} \quad (24)$$

Exemplo 11.5

Conforme mostrado na Figura 11.26, os polos de $G(z)$ estão localizados fora do círculo unitário,¹ pois $|z_1| = |z_2| = \sqrt{0,9^2 + 0,9^2} \cong 1,27 > 1$. Portanto, o sistema $G(z)$ é instável.

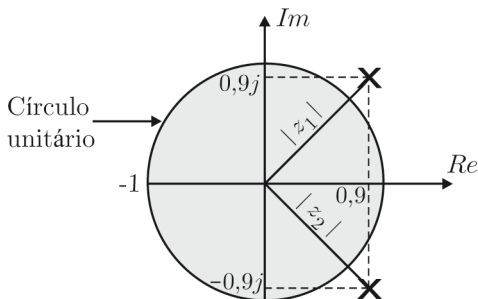


Figura 11.26 Posição dos polos de $G(z)$.

¹Círculo unitário é o círculo aberto de raio 1 e centro na origem do plano complexo z .

Cr terio de Routh

O critério de Routh, visto anteriormente para analisar a estabilidade de sistemas contínuos no plano s , também pode ser utilizado para analisar a estabilidade de sistemas discretos no plano z . Para isso basta realizar uma transforma o bilinear, que consiste em substituir a variável complexa z por uma expressão na variável v , dada por

$$z = \frac{v + 1}{v - 1}. \quad (25)$$

Escrevendo v na forma cartesiana $\sigma + j\omega$, tem-se que

$$\begin{aligned} |z| < 1 &\Rightarrow \left| \frac{v + 1}{v - 1} \right| = \left| \frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1} \right| < 1 \Rightarrow \frac{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}{(\sigma - 1)^2 + \omega^2} < 1^2 \\ &\Rightarrow \sigma^2 + 2\sigma + 1 + \omega^2 < \sigma^2 - 2\sigma + 1 + \omega^2 \Rightarrow 4\sigma < 0 \\ &\Rightarrow \sigma < 0. \end{aligned}$$

Critério de Routh

Portanto, conforme é mostrado na Figura 11.27, por meio da transformação bilinear (25) consegue-se mapear o interior do círculo unitário ($|z| < 1$) no semiplano esquerdo aberto ($\sigma < 0$) da variável complexa v (sem precisar recorrer à exponencial: $z = e^{sT}$ nem conhecer o período de amostragem).

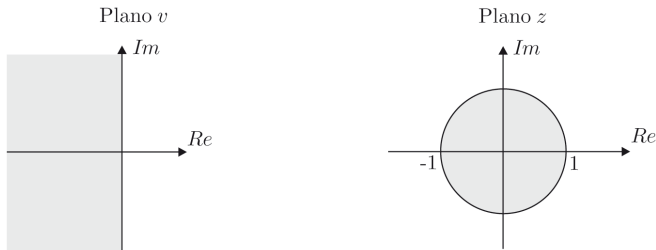


Figura 11.27 Mapeamento do plano z no plano v .

Assim, para determinar a estabilidade de sistemas discretos basta aplicar a transformação bilinear (25) no denominador da função de transferência na variável complexa z e depois aplicar o critério de Routh na variável complexa v .

Considere o sistema da Figura 11.28.

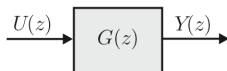


Figura 11.28 Função de transferência $G(z)$ de um sistema discreto.

Suponha que a função de transferência $G(z)$ seja dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{N(z)}{D(z)}. \quad (26)$$

O critério de estabilidade de Jury é aplicado para sistemas discretos, e permite determinar se um sistema $G(z)$ é estável ou não sem precisar calcular as raízes do polinômio do denominador $D(z)$ da função de transferência $G(z)$.

Critério de Jury

Suponha que o polinômio $D(z)$ seja dado por

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \text{ com } a_0 > 0. \quad (27)$$

A seguir deve-se construir a tabela de estabilidade de Jury de acordo com a Tabela 11.1.

Tabela 11.1 Tabela de estabilidade de Jury

Linha	z^0	z^1	z^2	z^3	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	\dots	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	\dots	c_0		
6	c_0	c_1	c_2	c_3	\dots	c_{n-2}		
.	.							
.	.							
.	.							
$2n - 5$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n - 4$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n - 3$	q_2	q_1	q_0					

Critério de Jury

De acordo com a Tabela 11.1 a primeira linha é composta pelos coeficientes do polinômio $D(z)$, alinhados em potências ascendentes de z . Os elementos da segunda linha são alinhados de maneira inversa à da primeira. Os elementos de qualquer linha par são alinhados de maneira inversa à de qualquer linha ímpar imediatamente anterior. A última linha da tabela é composta por apenas três elementos (q_2 , q_1 e q_0). Os elementos da linha 3 até a linha $2n - 3$ são calculados através dos seguintes determinantes:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$
$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2,$$

...

...

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2.$$

Critério de Jury: um sistema com equação característica $D(z) = 0$ é estável se todas as condições a seguir são satisfeitas.

1) $|a_n| < a_0$;

2) $D(z)|_{z=1} > 0$;

3) $D(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 \text{ para } n \text{ par,} \\ < 0 \text{ para } n \text{ ímpar.} \end{cases}$

$$|b_{n-1}| > |b_0|$$

$$|c_{n-2}| > |c_0|$$

4)

⋮

$$|q_2| > |q_0|.$$

Determine se o sistema

$$G(z) = \frac{z - 0,2}{z^3 + 2,1z^2 + 2,08z + 0,64} \quad (28)$$

é estável ou instável

- Usando a transformação bilinear e o critério de Routh;
- Usando o critério de Jury.

Exercício 11.2

Usando a transformação bilinear e o critério de Routh, determine se o sistema

$$G(z) = \frac{z - 0,2}{z^3 + 2,1z^2 + 2,08z + 0,64} \quad (11.69)$$

é estável ou instável.

Solução

A equação característica da função de transferência (11.69) é

$$z^3 + 2,1z^2 + 2,08z + 0,64 = 0. \quad (11.70)$$

Aplicando a transformação bilinear (11.58),

$$\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^3 + 2,1\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + 2,08\left(\frac{v+1}{v-1}\right) + 0,64 = 0. \quad (11.71)$$

Multiplicando a Equação (11.71) por $(v-1)^3$,

$$(v+1)^3 + 2,1(v+1)^2(v-1) + 2,08(v+1)(v-1)^2 + 0,64(v-1)^3 = 0. \quad (11.72)$$

Expandindo a Equação (11.72), obtém-se

$$5,82v^3 + 1,1v^2 + 0,74v + 0,34 = 0. \quad (11.73)$$

Como todos os coeficientes do polinômio (11.73) estão presentes e têm o mesmo sinal, é necessário montar a seguinte tabela de Routh:

v^3	5,82	0,74
v^2	1,1	0,34
v^1	b_1	
v^0	c_1	

1ª coluna
de coeficientes

$$b_1 = \frac{1,1 \cdot 0,74 - 5,82 \cdot 0,34}{1,1} \cong -1,06, \quad c_1 = \frac{b_1 \cdot 0,34}{b_1} = 0,34.$$

Como $b_1 < 0$, há duas mudanças de sinal na 1ª coluna de coeficientes da tabela de Routh. Logo, o polinômio na variável v possui duas raízes no semiplano direito. Com isso o polinômio (11.70) na variável z possui duas raízes fora do círculo unitário. Portanto, o sistema (11.69) é instável.

De fato, os polos de $G(z)$ são

$$z_1 = -0,8 + 0,8j, \quad z_2 = -0,8 - 0,8j \quad \text{e} \quad z_3 = -0,5,$$

sendo $|z_1| = |z_2| = \sqrt{0,8^2 + 0,8^2} \cong 1,13 > 1$.

Exercício 11.3

Usando o critério de Jury, determine se o sistema (11.69) é estável ou instável.

Solução

O polinômio $D(z)$ é dado por

$$D(z) = z^3 + 2,1z^2 + 2,08z + 0,64. \quad (11.74)$$

Os coeficientes de $D(z)$ são

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2,1, \quad a_2 = 2,08 \quad \text{e} \quad a_3 = 0,64.$$

A primeira condição é satisfeita, pois

$$|a_3| < a_0 \Rightarrow |0,64| < 1. \quad (11.75)$$

A segunda condição também é satisfeita, pois

$$D(z)|_{z=1} = 1 + 2,1 + 2,08 + 0,64 = 5,82 > 0. \quad (11.76)$$

Sendo ímpar o grau de $D(z)$, pois $n = 3$, então da terceira condição tem-se que

$$D(z)|_{z=-1} = -1 + 2,1 - 2,08 + 0,64 = -0,34 < 0, \quad (11.77)$$

ou seja, a terceira condição é verdadeira.

Na Tabela 11.3 é construída a tabela de estabilidade de Jury.

Tabela 11.3 Tabela de estabilidade de Jury

Linha	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0,64	2,08	2,1	1
2	1	2,1	2,08	0,64
	$b_2 = \begin{vmatrix} 0,64 & & & 1 \\ 1 & & & 0,64 \end{vmatrix} = -0,5904$			
	$b_1 = \begin{vmatrix} 0,64 & & 2,1 \\ 1 & & 2,08 \end{vmatrix} = -0,7688$			
	$b_0 = \begin{vmatrix} 0,64 & 2,08 \\ 1 & 2,1 \end{vmatrix} = -0,7360$			
3	-0,5904	-0,7688	-0,7360	

Da Tabela 11.3 verifica-se que a quarta condição é falsa, pois

$$|b_2| < |b_0| \Rightarrow |-0,5904| < |-0,7360|. \quad (11.78)$$

Como nem todas as condições do critério de Jury são satisfeitas, então o sistema (11.69) é instável.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 11.**