

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 5.2: Sistemas de Tempo Discreto: Revisão de Função de Transferência, Resposta Impulsiva e Transformada Z inversa

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Função de Transferência

Num sistema discreto no tempo, a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$ são seqüências de números, sendo portanto suscetíveis de representação por transformadas \mathcal{Z} . A descrição matemática fundamental de um sistema dinâmico discreto no tempo é uma equação de diferenças. No caso de ser linear e invariante no tempo ela é do tipo

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + a_{n-2}y(k+n-2) + \dots + a_0y(k) = \\ b_m u(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + b_{m-2}u(k+m-2) + \dots + b_0u(k) \quad (1)$$

sendo n a ordem do sistema, e a_i ($i = 0, \dots, n-1$) e b_j ($j = 0, \dots, m$) constantes, com $m \leq n$ (para que o sistema seja causal, ou seja a saída não dependa de valores futuros da entrada).

Aplicando a propriedade (10.3) do avanço na equação (1), obtém-se

$$z^n Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(k)z^{n-k} + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) - a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} y(k)z^{n-1-k} + \dots + a_0 Y(z) = \\ b_m z^m U(z) - b_m \sum_{k=0}^{m-1} u(k)z^{m-k} + b_{m-1}z^{m-1}U(z) - b_{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} u(k)z^{m-1-k} + \dots + b_0 U(z). \quad (2)$$

Função de Transferência

Supondo condições iniciais nulas

$$y_{n-1} = y_{n-2} = \dots = y_0 = u_{m-1} = u_{m-2} = \dots = u_0 = 0, \quad (3)$$

obtém-se

$$(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0) U(z). \quad (4)$$

A função de transferência $G(z)$ é definida como a razão das transformadas \mathcal{Z} da saída $Y(z)$ e da entrada $U(z)$ do sistema supondo condições iniciais nulas ($c.i. = 0$), ou seja,

$$G(z) \triangleq \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{c.i.=0}. \quad (5)$$

Função de Transferência

Logo, a função de transferência é dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}, \quad \text{com } m \leq n. \quad (6)$$

Note que $G(z)$ independe dos sinais de entrada e saída, desde que haja condições iniciais nulas, $G(z)$ depende apenas dos parâmetros a_i (em que $i = 0, \dots, n-1$), b_j (com $j = 0, \dots, m$) e das ordens n e m .

Um sistema discreto, linear e invariante no tempo $G(z)$, com entrada $U(z)$ e saída $Y(z)$, é apresentado na Figura 10.6.

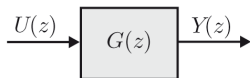


Figura 10.6 Sistema $G(z)$ com entrada $U(z)$ e saída $Y(z)$.

Função de Transferência

Assim como no caso dos sistemas contínuos, os pontos do plano z em que a função $G(z)$ tende ao infinito são os **polos** de $G(z)$. Já os pontos em que a função $G(z)$ se anula são os **zeros** de $G(z)$. No caso de $G(z)$ ser racional, como na equação (6), tem-se que

- os **polos** são as raízes do polinômio do denominador de $G(z)$, e
- os **zeros** são as raízes do polinômio do numerador de $G(z)$.

Uma outra forma equivalente de expressar a função de transferência (6) é através de potências negativas de z . Para isso basta multiplicar o numerador e o denominador da Equação (6) por z^{-n} , ou seja,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}, \quad \text{com } m \leq n. \quad (7)$$

Álgebra de blocos

É fácil verificar que valem para as funções de transferência em z as mesmas regras de álgebra de blocos que as das funções de transferência em s .

Transformada \mathcal{Z} inversa

Deseja-se determinar a sequência $f(k)$, cuja transformada \mathcal{Z} é uma dada função $F(z)$. A sequência $f(k)$ é dita transformada \mathcal{Z} inversa e pode ser obtida através dos seguintes métodos:

1) Expansão em série por divisão contínua

A expansão em série de potências da função $F(z)$ consiste na simples divisão contínua do polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e identificação dos coeficientes que multiplicam as diferentes potências de z .

2) Programa de computador

Consiste em determinar numericamente a sequência $f(k)$ a partir de uma equação de diferenças implementada dentro de um laço de repetição de um programa de computador. Para obter a equação de diferenças supõe-se que $F(z)$ seja uma função de transferência com entrada impulsiva e condições iniciais nulas.

3) Expansão em frações parciais

Considere a função

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots (z - p_n)}, \quad \text{com } m \leq n. \quad (8)$$

O método da expansão em frações parciais consiste em expandir a função da Equação (8) em frações que podem ser facilmente identificáveis na tabela de transformadas \mathcal{Z} . A diferença deste método com relação aos dois anteriores é que o resultado da transformação inversa da função $F(z)$ é uma **função $f(k)$ e não uma sequência $f(k)$** .

Exemplo 10.6 (Expansão em série por divisão contínua)

Determine $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ quando $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2}. \quad (9)$$

Escrevendo $F(z)$ com potências negativas de z , obtém-se

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{(z - 0,5)(z^2 - 2z + 1)} \\ &= \frac{z}{z^3 - 2,5z^2 + 2z - 0,5} \cdot \frac{z^{-3}}{z^{-3}} \\ &= \frac{z^{-2}}{1 - 2,5z^{-1} + 2z^{-2} - 0,5z^{-3}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Exemplo 10.6 (Expansão em série por divisão contínua)

Dividindo o numerador pelo denominador da Equação (10), obtém-se

$$\begin{array}{r} z^{-2} \\ -z^{-2} \quad +2,5z^{-3} \quad -2z^{-4} \quad 0,5z^{-5} \\ \hline \quad +2,5z^{-3} \quad -2z^{-4} \quad 0,5z^{-5} \\ \quad -2,5z^{-3} \quad +6,25z^{-4} \quad -5z^{-5} \quad +1,25z^{-6} \\ \quad \quad +4,25z^{-4} \quad -4,5z^{-5} \quad +1,25z^{-6} \\ \quad \quad -4,25z^{-4} \quad +10,625z^{-5} \quad -8,5z^{-6} \quad +2,125z^{-7} \\ \quad \quad \quad +6,125z^{-5} \quad -7,25z^{-6} \quad +2,125z^{-7} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - 2,5z^{-1} + 2z^{-2} - 0,5z^{-3} \\ z^{-2} + 2,5z^{-3} + 4,25z^{-4} + 6,125z^{-5} + \dots \end{array} \right.$$

$$F(z) = z^{-2} + 2,5z^{-3} + 4,25z^{-4} + 6,125z^{-5} + \dots \quad (11)$$

Logo,

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2,5, \quad f(4) = 4,25, \quad f(5) = 6,125.$$

Conforme se pode notar, este método fornece diretamente os elementos da série ($F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$) e não uma expressão geral para a sequência $f(k)$.

Exemplo 10.7 (Programa de computador)

Determine $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ quando $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2}. \quad (12)$$

Supondo que $F(z)$ é a saída de um sistema com entrada impulsiva ($U(z) = 1$) e com condições iniciais nulas, então

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2} U(z). \quad (13)$$

Escrevendo $F(z)$ em termos de potências negativas de z , obtém-se

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2,5z^{-1} + 2z^{-2} - 0,5z^{-3}} U(z). \quad (14)$$

Passando o denominador multiplicando o lado esquerdo da equação,

$$F(z) - 2,5z^{-1}F(z) + 2z^{-2}F(z) - 0,5z^{-3}F(z) = z^{-2}U(z), \quad (15)$$

aplicando a propriedade do atraso, e isolando $f(k)$ obtém-se a equação de diferenças

$$f(k) = 2,5f(k - 1) - 2f(k - 2) + 0,5f(k - 3) + u(k - 2) \quad (16)$$

Exemplo 10.7 (Programa de computador)

Sabendo-se que $f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$ e que $u(k)$ é um impulso ($u(k) = \delta(k)$), os valores de $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) podem ser calculados por meio de uma implementação da Equação (16) num programa de computador como o apresentado a seguir (em linguagem C).

Tabela 10.1 Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \dots, 10$

```
fk_1=0;
fk_2=0;
fk_3=0;
for (k=0;k<=10;k++)
{
    if (k==2) uk_2=1;
        else uk_2=0;
    fk=2.5*fk_1-2*fk_2+0.5*fk_3+uk_2;
    fk_3=fk_2;
    fk_2=fk_1;
    fk_1=fk;
}
```

k	$u(k-2)$	$f(k)$
0	0	0
1	0	0
2	1	1
3	0	2,5000
4	0	4,2500
5	0	6,1250
6	0	8,0625
7	0	10,0313
8	0	12,0156
9	0	14,0078
10	0	16,0039

Expansão em frações parciais: polos distintos

Se $F(z)$ possuir pelo menos um zero na origem ($b_0 = 0$) e apenas polos distintos, então pode-se realizar a seguinte expansão:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \dots + \frac{a_n}{z - p_n}, \quad (17)$$

onde cada coeficiente a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pode ser calculado como

$$a_i = \left[(z - p_i) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=p_i}. \quad (18)$$

Após a expansão $F(z)$ pode ser escrita como

$$F(z) = \frac{a_1 z}{z - p_1} + \frac{a_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{a_n z}{z - p_n}. \quad (19)$$

Expansão em frações parciais: polos distintos

A inversa de $F(z)$ é a soma das inversas

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{a_i z}{z - p_i} \right] = a_i (p_i)^k, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

A expansão de $F(z)/z$ visa apenas facilitar a identificação das frações expandidas na tabela de transformadas \mathcal{Z} . Caso $F(z)$ não possua pelo menos um zero na origem o método também pode ser aplicado, ou seja,

$$F(z) = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \dots + \frac{a_n}{z - p_n}. \quad (21)$$

Pela propriedade do atraso, tem-se que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{a_i}{z - p_i} \right] = \mathcal{Z}^{-1} \left[z^{-1} \frac{a_i z}{z - p_i} \right] = a_i (p_i)^{k-1}, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Se $F(z)$ possuir polos complexos conjugados, então cada polo complexo também pode ser manipulado como sendo uma raiz distinta.

Expansão em frações parciais: polos múltiplos

Se $F(z)$ possuir um polo p com multiplicidade m , então devem ser desenvolvidas m frações associadas a p , ou seja,

$$\frac{b_1}{(z-p)^m} + \frac{b_2}{(z-p)^{m-1}} + \dots + \frac{b_m}{(z-p)}.$$

Prova-se que cada constante b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) pode ser calculada como

$$b_j = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[(z-p)^m \frac{F(z)}{z} \right]. \quad (23)$$

A equação (23) também se aplica no caso de $F(z)$ possuir polos complexos conjugados múltiplos.

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

Determine a transformada \mathcal{Z} inversa de

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2}. \quad (24)$$

Note que $F(z)$ possui um zero na origem e um polo múltiplo em $z = 1$ com multiplicidade $m = 2$.

a) $F(z)/z$ pode ser expandida em frações parciais do seguinte modo:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z - 0,5} + \frac{b_1}{(z - 1)^2} + \frac{b_2}{z - 1}, \quad (25)$$

sendo

$$a_1 = \left[(z - 0,5) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=0,5} = \left[(z - 0,5) \frac{1}{(z - 0,5)(z - 1)^2} \right]_{z=0,5} = 4, \quad (26)$$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1)^2 \frac{F(z)}{z} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1)^2 \frac{1}{(z - 0,5)(z - 1)^2} \right] = 2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[(z - 1)^2 \frac{F(z)}{z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z - 1)^2 \frac{1}{(z - 0,5)(z - 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{(z - 0,5)^2} \right] = -4. \end{aligned} \quad (28)$$

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

Portanto,

$$F(z) = \frac{4z}{z - 0,5} + \frac{2z}{(z - 1)^2} + \frac{-4z}{z - 1}. \quad (29)$$

Da tabela de transformadas \mathcal{Z} obtém-se

$$f(k) = 4(0,5)^k + 2k - 4, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(1) &= 0, & f(2) &= 1, & f(3) &= 2,5, & f(4) &= 4,25, \\ f(5) &= 6,125, & f(6) &= 8,0625, & f(7) &= 10,0313, \\ f(8) &= 12,0156, & f(9) &= 14,0078, & f(10) &= 16,0039. \end{aligned}$$

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

b) Outro modo de obter os coeficientes da expansão $F(z)/z$ é através de uma identificação dos coeficientes do polinômio do numerador antes e depois da expansão em frações parciais. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{F(z)}{z} &= \frac{a_1}{z - 0,5} + \frac{b_1}{(z - 1)^2} + \frac{b_2}{z - 1} \\ &= \frac{a_1(z - 1)^2 + b_1(z - 0,5) + b_2(z - 0,5)(z - 1)}{(z - 0,5)(z - 1)^2}\end{aligned}\quad (31)$$

Identificando $a_1(z - 1)^2 + b_1(z - 0,5) + b_2(z - 0,5)(z - 1) = 1$, ou seja,

$$z^2(a_1 + b_2) + z(-2a_1 + b_1 - 1,5b_2) + a_1 - 0,5b_1 + 0,5b_2 = 1. \quad (32)$$

A Equação (32) tem solução quando

$$\begin{cases} a_1 + b_2 = 0, \\ -2a_1 + b_1 - 1,5b_2 = 0, \\ a_1 - 0,5b_1 + 0,5b_2 = 1. \end{cases} \quad (33)$$

Resolvendo o sistema (33) obtêm-se os mesmos resultados que em (26), (27) e (28), ou seja, $a_1 = 4$, $b_1 = 2$, $b_2 = -4$.

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

c) Em vez de expandir a função $F(z)/z$ pode-se também expandir $F(z)$, isto é,

$$F(z) = \frac{a_1}{z - 0,5} + \frac{b_1}{(z - 1)^2} + \frac{b_2}{z - 1} \quad (34)$$

sendo

$$a_1 = [(z - 0,5) F(z)]_{z=0,5} = \left[(z - 0,5) \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2} \right]_{z=0,5} = 2, \quad (35)$$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)^2 F(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1)^2 \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2} \right] = 2, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z - 1)^2 F(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z - 1)^2 \frac{z}{(z - 0,5)(z - 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{-0,5}{(z - 0,5)^2} \right] = -2. \end{aligned} \quad (37)$$

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

Portanto,

$$F(z) = \frac{2}{z - 0,5} + \frac{2}{(z - 1)^2} - \frac{2}{z - 1}. \quad (38)$$

Aplicando a propriedade do atraso na Equação (38), obtém-se a seguinte transformada \mathcal{Z} inversa

$$f(k) = \begin{cases} 2(0,5)^{k-1} + 2(k-1) - 2 & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & k = 0. \end{cases} \quad (39)$$

A Equação (39) também pode ser escrita como

$$f(k) = 2(0,5)^{k-1} \frac{0,5}{0,5} + 2k - 4. \quad (40)$$

Logo,

$$f(k) = 4(0,5)^k + 2k - 4, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (41)$$

que é igual à $f(k)$ da Equação (30).

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 10.**