

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 4.2: Controladores PID: Aspectos de implementação dos controladores PID

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Aspectos de implementação dos controladores PID

- O controlador PID, na forma apresentada na aula anterior, apresenta alguns inconvenientes associados à aplicação prática.
- Nesta aula são consideradas algumas técnicas consagradas na implementação de controladores PID que visam contornar esses inconvenientes.

Implementação do termo derivador

- Conforme citado na aula passada, o termo associado à derivada no controlador PID produz um ganho que tende ao infinito em frequências altas. Como nas aplicações de controle a presença de ruídos é inevitável, esses ganhos altos levam à saturação os elementos finais de controle como, por exemplo, amplificadores e atuadores.
- De forma a contornar esse problema, a função de transferência do controlador PID é usualmente modificada, acrescentando-se um filtro passa-baixas ao termo associado à derivada, que resulta como

$$PID(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{N T_D s + 1} \right), \quad (1)$$

sendo N um parâmetro tipicamente adotado entre 0,05 e 0,17.

- No caso do controlador PD, cuja função de transferência original é

$$PD(s) = K_c (1 + T_D s), \quad (2)$$

a inclusão do filtro passa-baixas resulta na função de transferência modificada

$$PD(s) = K_c \left(1 + \frac{T_D s}{N T_D s + 1} \right) = K_c \left[\frac{(N T_D + T_D) s + 1}{N T_D s + 1} \right]. \quad (3)$$

Implementação do termo derivador

Na Figura 6.20 são mostrados os gráficos de Bode do módulo do controlador PD na forma original (2) e na forma modificada (3), incluindo o filtro passa-baixas. Fica evidente o efeito de atenuação do ganho em frequências altas a partir da frequência $\omega = \frac{1}{NT_D}$.

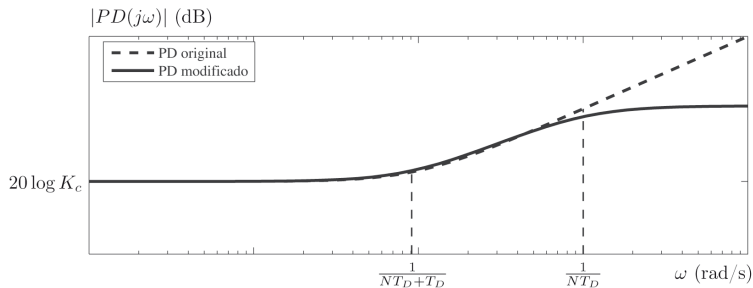


Figura 6.20 Diagramas de Bode do módulo do PD original e do PD modificado com a inclusão do filtro passa-baixas.

Implementação sem derivada do erro

Nos problemas de regulação da saída da planta, em que o sinal de referência é mantido em níveis constantes, a derivada do erro pode produzir picos nos amplificadores e atuadores quando se muda o nível do sinal de referências. Nesta operação, ao se aplicar um sinal do tipo degrau na referência ocorre também um degrau no sinal de erro, e o termo derivador, por sua vez, produz picos na saída do controlador. Em vez de calcular a derivada do erro, como na equação

$$\begin{aligned} M(s) &= \left(K_c + \frac{K_c}{T_{IS}} + K_c T_{DS} \right) E(s) \\ &= \left(K_c + \frac{K_c}{T_{IS}} \right) E(s) + K_c T_{DS} [R(s) - Y(s)], \end{aligned} \quad (4)$$

uma solução é implementar a derivada apenas como realimentação do sinal de saída da planta, ou seja,

$$M(s) = \left(K_c + \frac{K_c}{T_{IS}} \right) E(s) - (K_c T_{DS}) Y(s) = PI(s)E(s) - D(s)Y(s). \quad (5)$$

Implementação sem derivada do erro

O diagrama de blocos desta implementação é apresentado na Figura 6.21. Note que os sinais de controle $M(s)$, produzidos pelas Equações (4) e (5), são idênticos a menos do instante em que ocorre o degrau no sinal de referência.

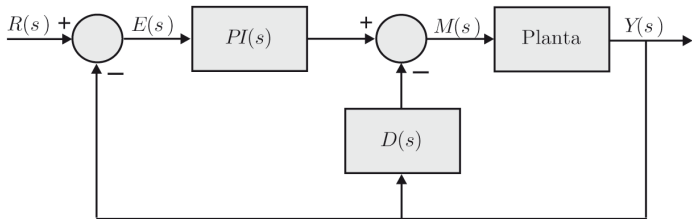


Figura 6.21 Diagrama de blocos do sistema de controle sem derivada do erro.

Implementação digital do controlador PID

Diz-se que um computador opera em tempo real quando é capaz de aceitar medidas digitais no instante k , executar operações lógicas e cálculos pré-estabelecidos e apresentar os resultados no instante $k + \tau$, $\tau > 0$.

Qualquer computador operando em tempo real pode implementar um controlador PID executando a equação de diferenças finita que se aproxime da equação diferencial do algoritmo PID. Considerando o controlador PID sem a derivada do erro

$$M(s) = K_c \left(E(s) + \frac{1}{T_I s} E(s) - T_D s Y(s) \right), \quad (6)$$

a equação diferencial correspondente é

$$m(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_D \frac{dy(t)}{dt} \right). \quad (7)$$

Supondo, como é frequente, que o tempo de cálculo τ é muito menor que o tempo T entre as interações com o processo controlado pode-se adotar como algoritmo PID digital

$$m(kT) \cong K_c \left(e(kT) + \frac{1}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT) T - T_D \frac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T} \right), \quad (8)$$

que é chamada forma de posição, pois requer o cálculo do valor pleno de $m(kT)$ a cada passo.

Implementação digital do controlador PID

A chamada forma de velocidade, que calcula apenas o incremento $\Delta m(kT)$ a cada passo, é

$$\Delta m(kT) = m(kT) - m[(k-1)T] \quad \text{ou} \quad (9)$$

$$\Delta m(kT) \cong K_c \left(e(kT) - e[(k-1)T] + \frac{1}{T_i} e(kT)T - T_D \frac{y(kT) - 2y[(k-1)T] + y[(k-2)T]}{T} \right). \quad (10)$$

Essa forma exige um integrador adicional para reconstruir $m(kT)$ a partir de $\Delta m(kT)$, pois

$$m(kT) = m[(k-1)T] + \Delta m(kT) = \sum_{i=0}^k \Delta m(iT) \quad (11)$$

e tem a vantagem de que, na hipótese de uma falha do computador ou de uma interrupção por emergência, no retorno ao funcionamento a variável $m(kT)$ se encontrará no último valor válido, e não em zero. A forma de velocidade é de fato a forma preferida.

Implementação analógica do controlador PID

Com o avanço tecnológico dos computadores e dos equipamentos de processamento digital de sinais a implementação de controladores na forma digital está sendo cada vez mais utilizada na prática.

Algumas vantagens da implementação digital sobre a analógica são:

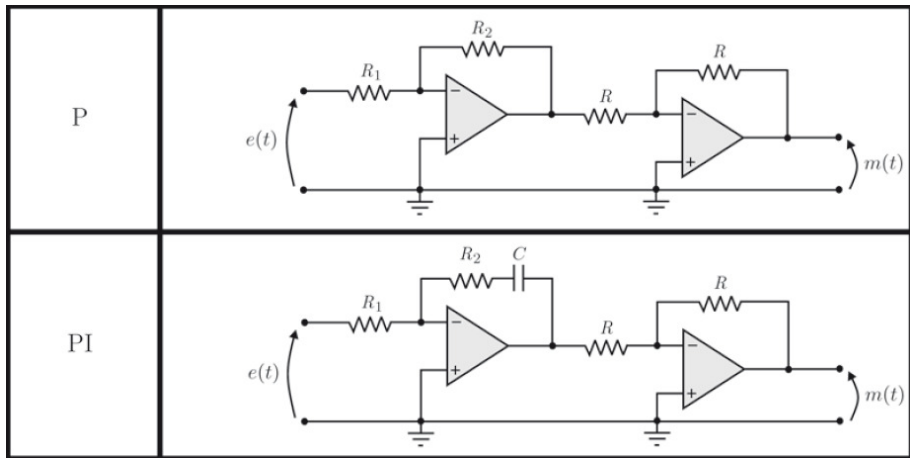
- maior precisão dos cálculos¹,
- implementação mais simples por meio de um programa computacional,
- fácil programação menor interferência de ruído,
- maior grau de integração e compactação entre outras.

A única vantagem da implementação analógica é que como os processos em geral são analógicos não é necessário realizar a conversão digital. Apesar disso, muitas indústrias utilizam até hoje controladores que foram implementados analogicamente.

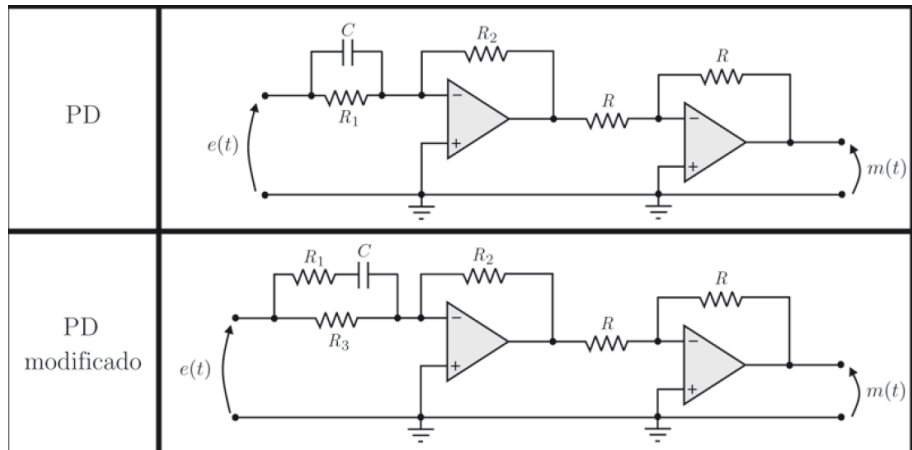
¹A precisão dos cálculos analógicos depende da precisão limitada de componentes eletrônicos, enquanto a precisão dos cálculos digitais depende da quantidade de circuitos de chaveamento.

Implementação analógica do controlador PID

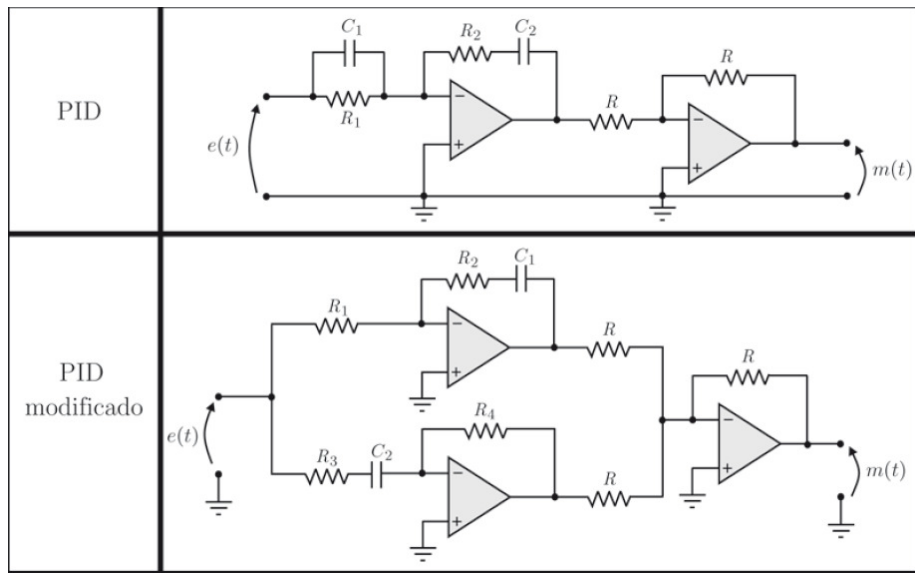
Nas figuras seguintes são apresentados os circuitos eletrônicos com amplificadores operacionais de alguns controladores.



Implementação analógica do controlador PID



Implementação analógica do controlador PID



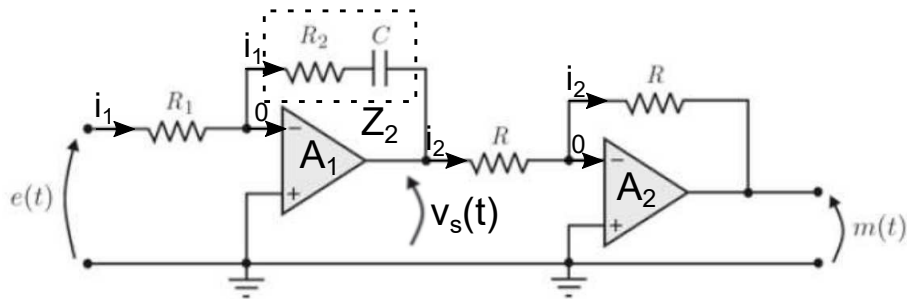
Implementação analógica do controlador PID

Na Tabela abaixo são apresentadas as correspondentes funções de transferência.

Controlador	$\frac{M(s)}{E(s)}$	K_c	T_I	T_D	N
P	K_c	$\frac{R_2}{R_1}$	-	-	-
PI	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$	$\frac{R_2}{R_1}$	$R_2 C$	-	-
PD	$K_c (1 + T_D s)$	$\frac{R_2}{R_1}$	-	$R_1 C$	-
PD modificado	$K_c \left(1 + \frac{T_D s}{N T_D s + 1} \right)$	$\frac{R_2}{R_3}$	-	$R_3 C$	$\frac{R_1}{R_3}$
PID	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$	$\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2}$	$R_1 C_1 + R_2 C_2$	$\frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$	-
PID modificado	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{N T_D s + 1} \right)$	$\frac{R_2}{R_1}$	$R_2 C_1$	$\frac{R_1 R_4 C_2}{R_2}$	$\frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}$

Exemplo de Implementação analógica PI

Determine a função de transferência ($M(s)/E(s)$) e os parâmetros da função de transferência (K_c e T_I) de um controlador PI implementado da seguinte forma:



Observe que acima temos dois amplificadores ligados no modo inversor, como $v_+(t) = v_-(t)$ e $v_+(t) = 0$ pois está ligada ao terra, então $v_-(t) = 0$ é um terra virtual. Além disso, devido à alta impedância de entrada, a corrente na entrada do amplificador é nula, portanto toda corrente $i_1(t)$ que passa por R_1 , também passa por Z_2 , assim como toda corrente $i_2(t)$ que passa por R na entrada do amplificador A_2 também passa por R sobre o amplificador A_2 .

Exemplo de Implementação analógica PI

A impedância $Z_2(s)$ vale

$$Z_2(s) = \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right) = \frac{R_2Cs + 1}{sC}$$

A transformada de Laplace da corrente $i_1(t)$ vale

$$I_1(s) = \frac{E(s) - \cancel{V_s(s)}^0}{R_1} = \frac{E(s)}{R_1} \quad \text{ou} \quad I_1(s) = \frac{\cancel{V_s(s)}^0 V_s(s)}{Z_2(s)} = -\frac{V_s(s)}{Z_2(s)}$$

igualando as duas expressões, tem-se a função de transferência de $e(t)$ para $v_s(t)$:

$$\frac{E(s)}{R_1} = -\frac{V_s(s)}{Z_2(s)} \Rightarrow V_s(s) = -\frac{Z_2(s)}{R_1} E(s). \quad (12)$$

Exemplo de Implementação analógica PI

No segundo amplificador, a transformada de Laplace da corrente $i_2(t)$ vale

$$i_2(s) = \frac{V_s(s) - \cancel{V_-(s)}^0}{R} = \frac{V_s(s)}{R} \quad \text{ou} \quad i_2(s) = \frac{\cancel{V_-(s)}^0 M(s)}{R} = -\frac{M(s)}{R}$$

igualando as duas expressões, tem-se que $M(s) = -V(s)$ e da Equação (13):

$$M(s) = -V_s(s) = -\left(-\frac{Z_2(s)}{R_1}\right) E(s) = \frac{Z_2(s)}{R_1} E(s),$$

ou seja, a função de transferência desse controlador PI é:

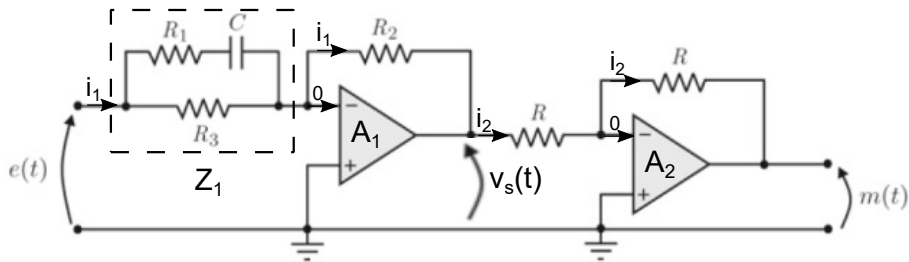
$$\begin{aligned} \frac{M(s)}{E(s)} &= \frac{Z_2(s)}{R_1} = \frac{R_2 C s + 1}{s C} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{R_2 C s + 1}{R_1 C s} = \frac{1}{R_1 C} \left(\frac{R_2 C s + 1}{s} \right) \\ &= K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K_c}{T_I} \left(\frac{T_I s + 1}{s} \right) \end{aligned}$$

com

$$T_I = R_2 C \quad \text{e} \quad \frac{K_c}{T_I} = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow K_c = \frac{T_I}{R_1 C} = \frac{R_2 \cancel{C}}{R_1 \cancel{C}} = \frac{R_2}{R_1}$$

Exemplo de Implementação analógica PD modificado

Determine a função de transferência ($M(s)/E(s)$) e os parâmetros da função de transferência (K_C , N e T_D) de um controlador PD modificado implementado da seguinte forma:



Observe que acima temos dois amplificadores ligados no modo inversor, como $v_+(t) = v_-(t)$ e $v_+(t) = 0$ pois está ligada ao terra, então $v_-(t) = 0$ é um terra virtual. Além disso, devido à alta impedância de entrada, a corrente na entrada do amplificador é nula, portanto toda corrente $i_1(t)$ que passa por Z_1 , também passa por R_2 , assim como toda corrente $i_2(t)$ que passa por R na entrada do amplificador A_2 também passa por R sobre o amplificador A_2 .

Exemplo de Implementação analógica PD modificado

A impedância $Z_1(s)$ vale

$$Z_1(s) = \frac{\left(R_1 + \frac{1}{sC}\right) R_3}{R_1 + \frac{1}{sC} + R_3} = \frac{\left(\frac{R_1 Cs + 1}{\cancel{sC}}\right) R_3}{\frac{(R_1 + R_3)Cs + 1}{\cancel{sC}}} = \frac{(R_1 Cs + 1)R_3}{(R_1 + R_3)Cs + 1}$$

A transformada de Laplace da corrente $i_1(t)$ vale

$$I_1(s) = \frac{E(s) - \cancel{V_s(s)} \rightarrow 0}{Z_1(s)} = \frac{E(s)}{Z_1(s)} \quad \text{ou} \quad I_1(s) = \frac{\cancel{V_s(s)} \rightarrow 0}{R_2} V_s(s) = -\frac{V_s(s)}{R_2}$$

igualando as duas expressões, tem-se a função de transferência de $e(t)$ para $v_s(t)$:

$$\frac{E(s)}{Z_1(s)} = -\frac{V_s(s)}{R_2} \Rightarrow V_s(s) = -\frac{R_2}{Z_1(s)} E(s). \quad (13)$$

Exemplo de Implementação analógica PD modificado

No segundo amplificador, a transformada de Laplace da corrente $i_2(t)$ vale

$$I_2(s) = \frac{V_s(s) - \cancel{V(s)}^0}{R} = \frac{V_s(s)}{R} \quad \text{ou} \quad I_2(s) = \frac{\cancel{V(s)}^0 M(s)}{R} = -\frac{M(s)}{R}$$

igualando as duas expressões, tem-se que $M(s) = -V(s)$ e da Equação (13):

$$M(s) = -V_s(s) = -\left(-\frac{R_2}{Z_1(s)}\right) E(s) = \frac{R_2}{Z_1(s)} E(s),$$

ou seja, a função de transferência desse controlador PD modificado é:

$$\begin{aligned} \frac{M(s)}{E(s)} &= \frac{R_2}{Z_1(s)} = R_2 \cdot \frac{(R_1 + R_3)Cs + 1}{(R_1Cs + 1)R_3} = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{(R_1C + R_3C)s + 1}{R_1Cs + 1} \\ &= K_c \left(1 + \frac{T_D s}{NT_D s + 1}\right) = K_c \left(\frac{(NT_D + T_D)s + 1}{NT_D s + 1}\right) \end{aligned}$$

com

$$K_c = \frac{R_2}{R_3}, \quad NT_D = R_1C \quad \text{e} \quad \cancel{NT_D} + T_D = \cancel{R_1C} + R_3C$$

$$\Rightarrow T_D = R_3C \quad \text{e} \quad N = \frac{R_1C}{T_D} = \frac{R_1\cancel{C}}{R_3\cancel{C}} = \frac{R_1}{R_3}$$

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 6.**