

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 4.1: Controladores PID – Introdução e função de transferência

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Controladores PID: Introdução

- Apesar de ao longo das últimas décadas, teorias matemáticas dedicadas ao controle ótimo e ao controle robusto terem produzido importantes resultados (indispensáveis nas aplicações aeronáuticas, aeroespaciais e similares), algumas arquiteturas especiais utilizando algoritmos clássicos, chamados de PID têm demonstrado notável eficácia e praticidade no controle dos processos industriais.
- Esses controladores PID, ainda mais quando inseridos nos computadores industriais e nos controladores lógicos programáveis (CLPs), mantêm-se como um dos principais equipamentos de controle.
- O nome PID deriva do fato de que sua função de transferência contém a soma das ações: Proporcional, Integradora e Derivadora.
- Seus parâmetros são de fácil ajuste e sua construção é adequadamente robusta para o ambiente industrial.
- O sucesso do controlador PID também decorreu de uma bem-sucedida padronização, na sua versão eletrônica, desde 1950.

A função de transferência do controlador PID

O modelo matemático de um controlador PID, conforme o padrão ISA (*International Society of Automation*), é dado por

$$m(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

sendo:

- $m(t)$: sinal de saída do controlador, chamado de variável manipulada;
- $e(t)$: sinal de entrada do controlador, chamado de erro atuante;
- K_c , T_I e T_D : parâmetros de ajuste do controlador.

As três parcelas do controlador PID correspondem aos efeitos Proporcional, Integrador e Derivador do sinal de erro atuante. Note que neste modelo os coeficientes de cada parcela são independentes (K_c , K_c/T_I e $K_c T_D$).

Tradicionalmente é utilizada a seguinte denominação, relativa aos parâmetros de ajuste do controlador PID:

- K_c : ganho proporcional;
- K_c/T_I : ganho da integral (*reset gain*);
- $K_c T_D$: ganho da derivada (*rate gain*).

A função de transferência do controlador PID

A função de transferência correspondente ao modelo da Equação (1) é

$$PID(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (2)$$

$$= K_c + \frac{K_c}{T_I s} + K_c T_D s \quad (3)$$

$$= \frac{K_c T_I T_D s^2 + K_c T_I s + K_c}{T_I s}, \quad (4)$$

ou seja, o controlador $PID(s)$ possui um polo na origem e dois zeros reais ou complexos conjugados em

$$s_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I^2 - 4T_I T_D}}{2T_I T_D}. \quad (5)$$

A função de transferência do controlador PID

Os controladores PID também são muito empregados com efeitos parciais:

- PI (Proporcional mais Integrador) para o qual se adota $T_D = 0$. Neste caso tem-se a função de transferência

$$PI(s) = K_c + \frac{K_c}{T_I s} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K_c (T_I s + 1)}{T_I s}, \quad (6)$$

que apresenta um zero real em $-1/T_I$ e um polo na origem.

- PD (Proporcional mais Derivador) para o qual se adota $T_I \rightarrow \infty$. Neste caso tem-se

$$PD(s) = K_c + K_c T_D s = K_c (1 + T_D s), \quad (7)$$

que apresenta um zero real em $-1/T_D$.

Efeito temporal das parcelas do PID

É útil analisar separadamente o efeito temporal de cada uma das três parcelas. Os efeitos dos termos proporcional e integral são mostrados na Figura 6.1, supondo um sinal de erro atuante do tipo pulso, de amplitude E .

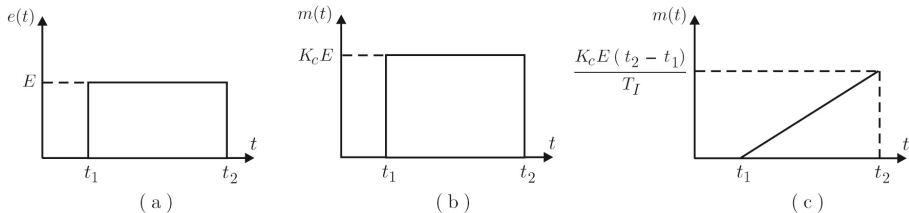


Figura 6.1 (a) Sinal de erro atuante de amplitude E . (b) Sinal gerado pela ação proporcional. (c) Sinal gerado pela ação integral.

Efeito temporal das parcelas do PID

O sinal do tipo pulso, utilizado para analisar o efeito das ações proporcional e integral, não é adequado para a análise do efeito correspondente à derivada devido às descontinuidades no início e no final do sinal. Assim, na Figura 6.2 utiliza-se uma rampa unitária como sinal de erro atuante para mostrar o efeito da derivada no controlador PID.

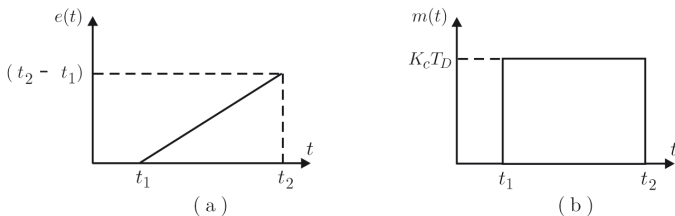


Figura 6.2 (a) Sinal de erro atuante (rampa unitária). (b) Sinal gerado pela ação derivadora.

Resposta em frequência do controlador PID

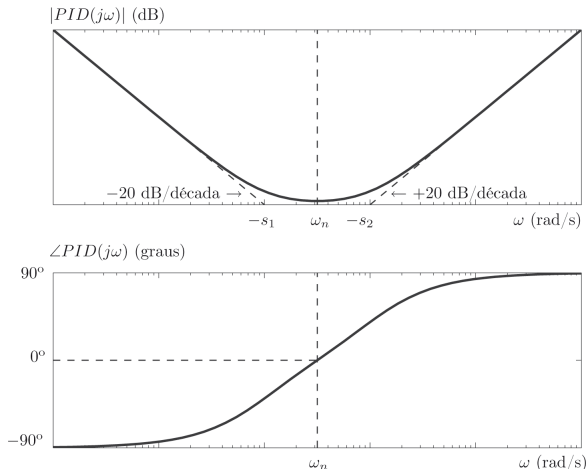


Figura 6.3 Diagramas de Bode do controlador PID com zeros reais $s_1 \neq s_2$.

Para obter o aspecto geral dos gráficos de Bode do controlador PID na Figura 6.3, considere a situação em que os zeros s_1 e s_2 do controlador são reais, com $(s_1 \neq s_2)$. Para isso, da Equação (5) deve-se ter $T_I^2 - 4T_I T_D > 0$. O gráfico do módulo possui em baixas frequências uma declividade de -20 dB/década, com predomínio da ação integradora e, em altas frequências possui uma declividade de $+20$ dB/década, com predomínio da ação derivadora. A defasagem varia de -90° a $+90^\circ$.

Resposta em frequência do controlador PID

- Como importantes características do controlador PID no domínio da frequência deve-se destacar o ganho tendendo a infinito em baixas frequências, cuja função é reduzir o erro estacionário, e o avanço de fase acima da frequência ω_n , cuja propriedade é melhorar a estabilidade relativa do sistema.
- Normalmente procura-se ajustar os parâmetros do controlador PID de forma que o atraso de fase produzido pelo termo integrador ocorra em frequências baixas, de forma a não afetar a estabilidade relativa do sistema.
- Os gráficos de Bode dos controladores PI e PD são muito mais simples, como mostrado nas Figuras 6.4 e 6.5 nos slides seguintes.

Resposta em frequência do controlador PI

O gráfico do módulo do controlador PI ($\frac{K_c}{T_I} \frac{(T_I s + 1)}{s}$) troca de declividade de -20dB/década para 0 na frequência $1/T_I$ e, como o controlador PID, produz ganhos elevados em baixas frequências, que reduzem o erro estacionário. Porém o atraso de fase do controlador PI piora a estabilidade relativa do sistema.

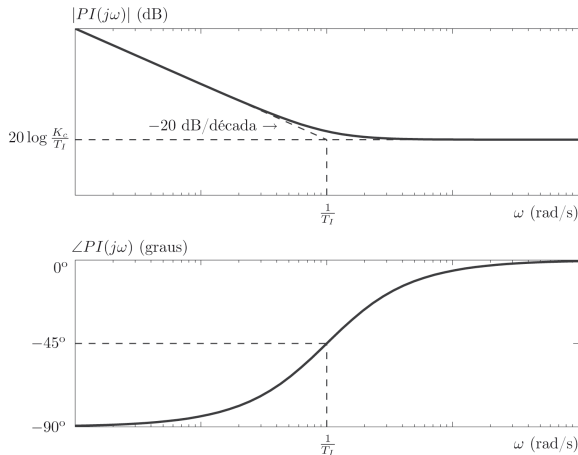


Figura 6.4 Diagramas de Bode do controlador PI com zero real em $s = -\frac{1}{T_I}$.

Resposta em frequência do controlador PD

Já no caso do controlador PD ($K_c(1 + T_D s)$), a declividade passa de 0 para $+20\text{dB/década}$ na frequência $1/T_D$ e produz um avanço de fase, cuja função é melhorar a estabilidade relativa do sistema.

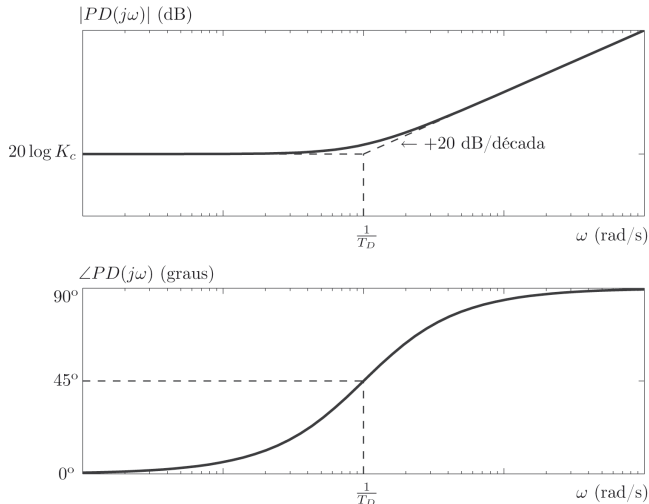


Figura 6.5 Diagramas de Bode do controlador PD com zero real em $s = -\frac{1}{T_D}$.

A função de transferência do controlador PID

- É interessante observar que os gráficos de Bode do controlador PID da Figura 6.3 diferem dos gráficos do controlador por avanço e atraso de fase. Embora pretendam ter o mesmo efeito estabilizante, o gráfico do módulo do PID, em teoria, tem ganhos tendendo ao infinito tanto em frequências muito baixas como em frequências muito altas.
- Para limitar o ganho em altas frequências deve-se ressaltar que, na prática, é comum a adição de uma parcela atenuadora, que consiste na inclusão de um polo de alta frequência na função de transferência do controlador (veja Implementação do termo derivador na próxima aula).
- Dada a simplicidade das funções de transferência dos controladores PI e PD, é comum a determinação dos parâmetros correspondentes utilizando-se o método do lugar das raízes, seguida de uma análise das margens de estabilidade por meio dos gráficos de Bode.
- Já para os controladores PID as técnicas de ajuste mais frequentes baseiam-se em regras heurísticas (veja as técnicas de ajuste de Ziegler-Nichols, que serão apresentadas nas próximas aulas).

Exemplo 6.1

Considere o diagrama de blocos da Figura 6.6.

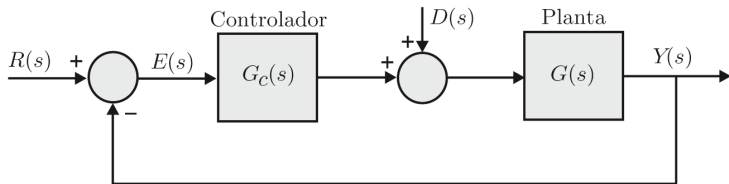


Figura 6.6 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Sendo a função de transferência da planta

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}, \quad (8)$$

deseja-se analisar o comportamento deste sistema com os controladores P , PI , PD , PID .

Exemplo 6.1: Controlador P

Para $G_c(s) = K_c$ o diagrama do lugar das raízes é apresentado na Figura 6.7.

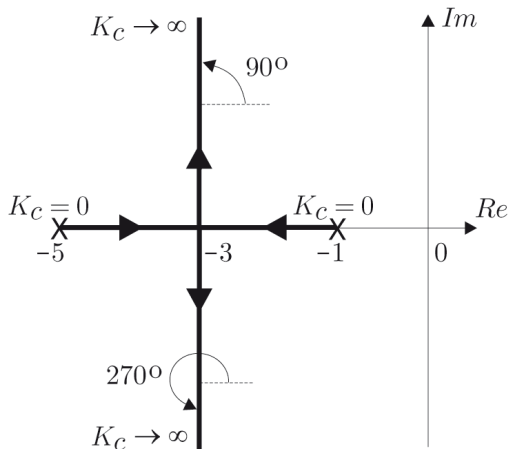


Figura 6.7 Lugar das raízes com o controlador P.

Exemplo 6.1: Controlador P

Para $s = -3$ os polos de malha fechada são reais e iguais (ponto de cruzamento das assíntotas: $S_c = \frac{\sum(\text{polos}) - \sum(\text{zeros})}{2} = \frac{-5 + (-1)}{2} = -3$). Neste ponto o ganho vale

$$|G(s = -3)| = \left(\frac{K_c}{|s + 1||s + 5|} \right)_{s=-3} = 1$$
$$K_c = (|s + 1||s + 5|)_{s=-3} = |-2||2| = 4. \quad (9)$$

Portanto:

- para $0 < K_c \leq 4$ os polos de malha fechada são reais e a resposta ao degrau na referência é amortecida;
- para $K_c > 4$ os polos de malha fechada são complexos conjugados e a resposta ao degrau na referência é subamortecida (pois a parte real dos polos será negativa).

Exemplo 6.1: Controlador P

A transformada de Laplace do Erro $E(s)$ pode ser escrita em termos das entradas de referência $R(s)$ e de perturbação $D(s)$:

$$\begin{aligned}E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - (E(s)G_c(s)G(s) + D(s)G(s)) \\ \Rightarrow (1 + G_c(s)G(s))E(s) &= R(s) - G(s)D(s) \\ \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}D(s)\end{aligned}$$

No caso de um controle proporcional ($G_c(s) = K_c$), tem-se

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_c G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + K_c G(s)}D(s). \quad (10)$$

Exemplo 6.1: Controlador P

Para entradas do tipo degrau unitário ($R(s) = D(s) = \frac{1}{s}$), o erro estacionário pode ser calculado por meio do teorema do valor final:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + \frac{K_c}{(s+1)(s+5)}} - \frac{\frac{1}{(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{K_c}{(s+1)(s+5)}} \right) \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{(s+1)(s+5)}{(s+1)(s+5) + K_c} - \frac{1}{(s+1)(s+5) + K_c} \right) \\ &= \frac{5}{5 + K_c} - \frac{1}{5 + K_c} = \frac{4}{5 + K_c}.\end{aligned}\tag{11}$$

Logo, o erro estacionário é não nulo para $K_c > 0$. Porém,

- para K_c “pequeno” o erro estacionário é “grande”, e
- para K_c “grande” o erro estacionário é “pequeno”.

Exemplo 6.1: Controlador P

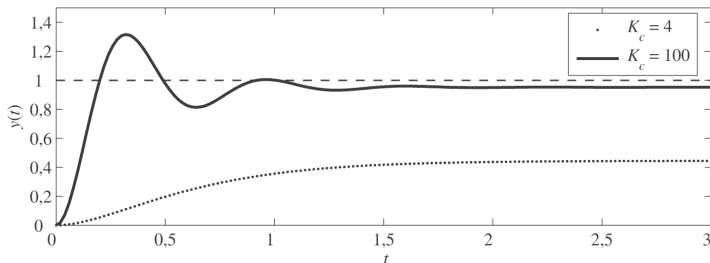


Figura 6.8 Resposta ao degrau unitário em $r(t)$ com controlador P e $d(t) = 0$.

Na Figura 6.8 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula ($D(s) = 0$), para $K_c = 4$ e $K_c = 100$. Note que:

- para $K_c = 4$, a resposta transitória é mais lenta, amortecida e o erro estacionário vale

$$e(\infty) = 5 / (5 + K_c) = 1 - y(\infty) \cong 0,556; \quad (12)$$

- para $K_c = 100$, a resposta transitória é mais rápida, subamortecida e o erro estacionário vale

$$e(\infty) = 5 / (5 + K_c) = 1 - y(\infty) \cong 0,048. \quad (13)$$

Exemplo 6.1: Controlador P

- Os diagramas de Bode de $K_c G(j\omega)$ são apresentados na Figura 6.9 (slide seguinte).
- Para $K_c = 4$ a margem de ganho é infinita, pois o gráfico de fase nunca cruza a linha de 180° e a margem de fase também é infinita, pois o gráfico do módulo nunca cruza a linha de 0dB.
- Já para $K_c = 100$ a margem de ganho é infinita mas a margem de fase vale $MF \cong 34,2^\circ$.

Exemplo 6.1: Controlador P

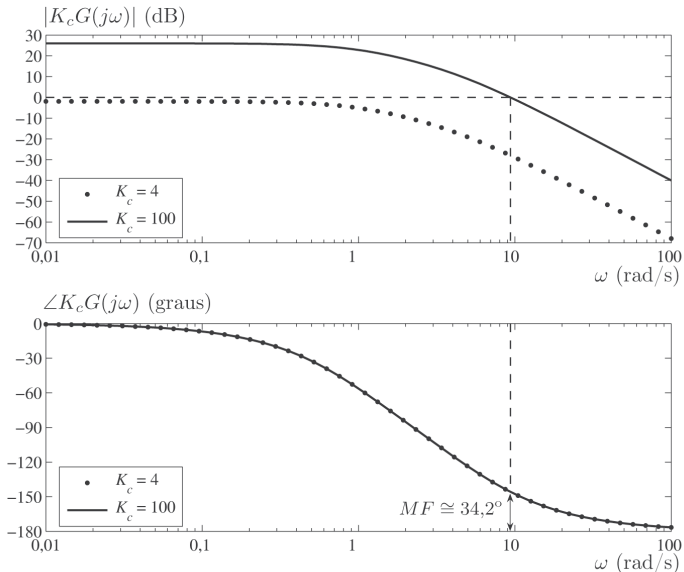


Figura 6.9 Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador P.

Exemplo 6.1: Controlador PI

A função de transferência do controlador PI é dada por

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K_c (T_I s + 1)}{T_I s}. \quad (14)$$

Um procedimento bastante usual é adotar T_I de forma que o zero do controlador cancele o polo mais lento da planta, neste exemplo em $s = -1$. Assim, supondo $T_I = 1$ o lugar das raízes fica como mostrado na Figura 6.10.

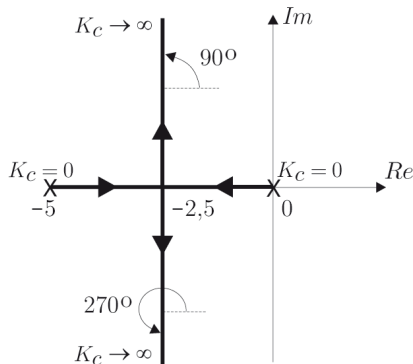


Figura 6.10 Lugar das raízes com o controlador PI.

Exemplo 6.1: Controlador PI

Verifica-se que o controlador PI desloca o lugar das raízes para a direita do plano s , piorando a estabilidade relativa do sistema.

Os polos de malha fechada são reais e iguais em $s = -2,5$ (ponto de cruzamento das assíntotas: $S_c = \frac{\sum(\text{polos}) - \sum(\text{zeros})}{2} = \frac{-5+0-1-(-1)}{2} = 2,5$). Neste ponto o ganho vale

$$|G(s = -2,5)| = \frac{K_c |s+1|_{s=-2,5}}{(|s||s+1||s+5|)_{s=-2,5}} = 1$$
$$\Rightarrow K_c = (|s||s+5|)_{s=-2,5} = |-2,5||2,5| = 6,25. \quad (15)$$

Logo,

- para $0 < K_c \leq 6,25$ os polos de malha fechada são reais e a resposta ao degrau na referência é amortecida;
- para $K_c > 6,25$ os polos de malha fechada são complexos conjugados e a resposta ao degrau na referência é subamortecida (pois a parte real é negativa).

Exemplo 6.1: Controlador PI

Um ponto importante a ser observado é que para quaisquer valores de K_c e T_I tem-se que o erro estacionário para entradas do tipo degrau nos sinais de referência $R(s)$ e de perturbação $D(s)$ é igual a zero, independentemente da função de transferência da planta. Esta é a principal característica do termo integrador do controlador PI, válida também para os controladores PID. Esta propriedade pode ser verificada analiticamente a partir do teorema do valor final.

Para $R(s) = D(s) = \frac{A}{s}$ tem-se que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} D(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) G(s)} D(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{T_I s}{T_I s + K_c (T_I s + 1) G(s)} - \frac{T_I s G(s)}{T_I s + K_c (T_I s + 1) G(s)} \right) \frac{A}{s} = 0. \quad (16)\end{aligned}$$

Exemplo 6.1: Controlador PI

Na Figura 6.11 é apresentada a resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula, e na Figura 6.12 é apresentada a resposta ao degrau unitário na perturbação, com referência nula. Em ambas as respostas foram adotados $T_I = 1$, $K_c = 6,25$ e $K_c = 100$. Analisando a Figura 6.11 verifica-se que o erro estacionário é sempre nulo. Para $K_c = 100$ a resposta ao degrau na referência tem um sobressinal $M_p \cong 44,4\%$, que é maior que o sobressinal $M_p \cong 31,6\%$, obtido com o controlador proporcional, para o mesmo ganho $K_c = 100$ da Figura 6.8. Isso porque o controlador PI **piora a estabilidade relativa do sistema**. Embora T_I tenha sido ajustado para cancelar um polo da planta, obviamente outros ajustes para K_c e T_I podem ser empregados para atender a uma dada especificação de transitório.

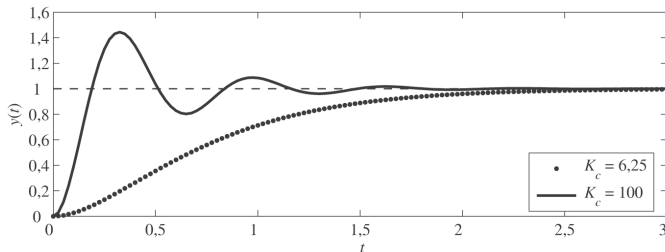


Figura 6.11 Resposta ao degrau unitário em $r(t)$ com controlador PI e $d(t) = 0$.

Exemplo 6.1: Controlador PI

A Figura 6.12 mostra que a saída estacionária tende para a sua referência ($y(\infty) = r(\infty) = 0$), sendo a perturbação do tipo degrau unitário ($D(s) = 1/s$) completamente rejeitada no estado estacionário.

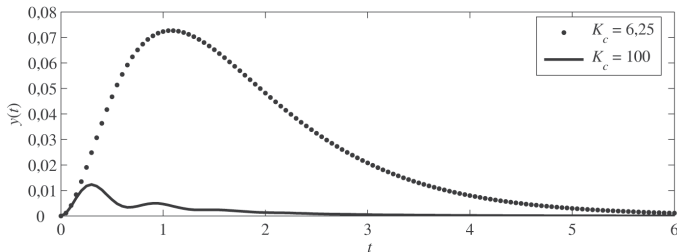


Figura 6.12 Resposta ao degrau unitário em $d(t)$ com controlador PI e $r(t) = 0$.

Os diagramas de Bode de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ são apresentados na Figura 6.13 (slide seguinte). Como o gráfico de fase nunca cruza a linha de 180° , as margens de ganho para $K_c = 6,25$ e $K_c = 100$ são infinitas. Porém, para $K_c = 6,25$ a margem de fase vale $MF \cong 76^\circ$ e para $K_c = 100$ a margem de fase vale $MF \cong 28^\circ$. Note que para $K_c = 100$, a margem de fase é menor, quando comparada com a margem de fase do sistema com o controlador proporcional na Figura 6.9.

Exemplo 6.1: Controlador PI

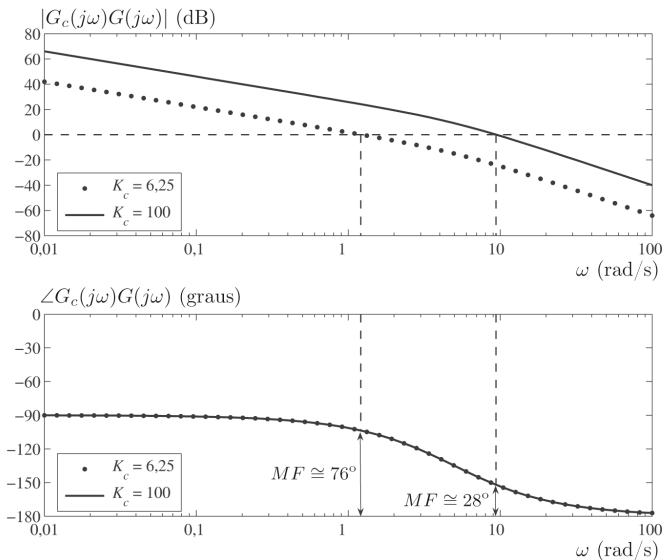


Figura 6.13 Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador PI.

Exemplo 6.1: Controlador PD

A função de transferência do controlador PD é dada por

$$G_c(s) = K_c (1 + T_D s). \quad (17)$$

Adotando $T_D = 1$, de forma que o zero do controlador cancele o polo mais lento da planta, o lugar das raízes fica como mostrado na Figura 6.14.

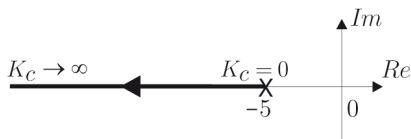


Figura 6.14 Lugar das raízes com o controlador PD.

Conforme se pode verificar, o lugar das raízes se desloca para a esquerda, aumentando a estabilidade relativa do sistema. Em particular para o valor de T_D adotado pode-se ajustar um ganho elevado para K_c , que a resposta transitória é sempre superamortecida.

Exemplo 6.1: Controlador PD

Aplicando-se entradas do tipo degrau unitário na referência $R(s)$ e na perturbação $D(s)$, o erro estacionário vale

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} D(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{(s+5)}{(s+5) + K_c} - \frac{1}{(s+5) + K_c} \right) \frac{1}{s} = \frac{5-1}{5+K_c} = \frac{4}{5+K_c}. \quad (18)\end{aligned}$$

Logo, o erro estacionário é não nulo para $K_c > 0$. Porém,

- para K_c “pequeno” o erro estacionário é “grande”;
- para K_c “grande” o erro estacionário é “pequeno”.

Exemplo 6.1: Controlador PD

Na Figura 6.15 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula, para $K_c = 100$. Verifica-se que com o controlador PD foi possível obter uma resposta rápida e sem sobressinal, o que não ocorreu com os controladores P e PI. Para $D(s) = 0$ o erro estacionário vale

$$e(\infty) = 5/(5 + K_c) = 1 - y(\infty) \approx 0,048. \quad (19)$$

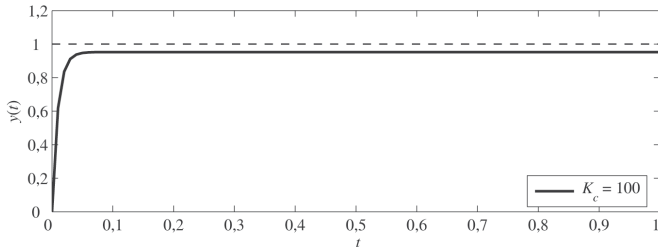


Figura 6.15 Resposta ao degrau unitário em $r(t)$ com controlador PD e $d(t) = 0$.

Os diagramas de Bode de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ são apresentados na Figura 6.16 (slide seguinte). A margem de ganho é infinita e a margem de fase vale $MF \approx 93^\circ$. Note que para o mesmo ganho $K_c = 100$, a margem de fase obtida com o controlador PD é maior que as margens de fase obtidas com os controladores P e PI.

Exemplo 6.1: Controlador PD

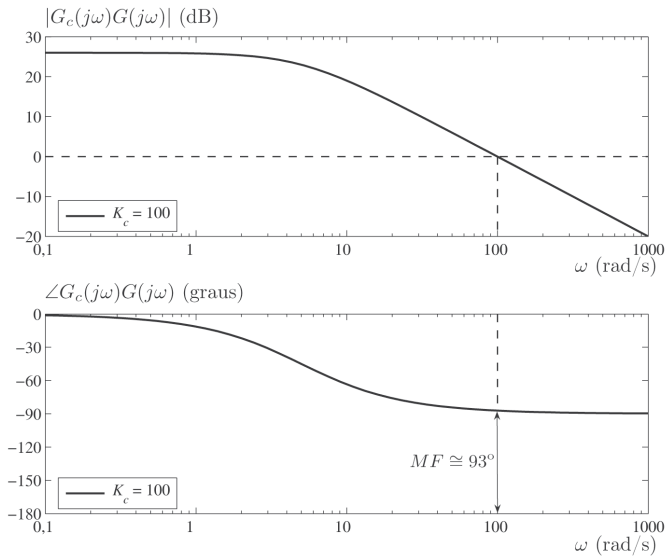


Figura 6.16 Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador PD.

Exemplo 6.1: Controlador PID

A função de transferência do controlador PID é dada por

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \frac{K_c T_I T_D s^2 + K_c T_I s + K_c}{T_I s}. \quad (20)$$

Adotando $T_I = 6/5$ e $T_D = 1/6$, de modo que os zeros do controlador cancelem os polos da planta, a função de transferência de malha aberta resulta em

$$\begin{aligned} G_{ma}(s) &= G_c(s)G(s) = K_c \left(1 + \frac{5}{6s} + \frac{1}{6}s \right) \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ &= K_c \left(\frac{\cancel{s^2 + 6s + 5}}{6s} \right) \frac{1}{\cancel{s^2 + 6s + 5}} = \frac{K_c}{6s}. \end{aligned} \quad (21)$$

Exemplo 6.1: Controlador PID

O lugar das raízes é apresentado na Figura 6.17.

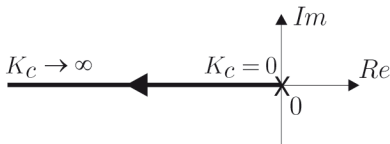


Figura 6.17 Lugar das raízes com o controlador PID.

Neste exemplo, o controlador PID possui todas as vantagens dos controladores P, PI e PD:

- aumentando-se o ganho K_c pode-se obter uma resposta rápida e sempre amortecida;
- o erro estacionário é nulo para entradas do tipo degrau na referência e na perturbação.

Exemplo 6.1: Controlador PID

Na Figura 6.18 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula, para $K_c = 100$.

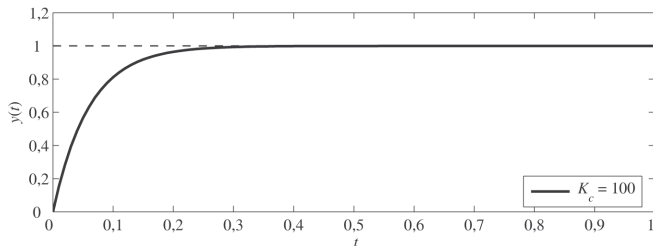


Figura 6.18 Resposta ao degrau unitário em $r(t)$ com controlador PID e $d(t) = 0$.

Os diagramas de Bode de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ são apresentados na Figura 6.19 (slide seguinte). A margem de ganho é infinita e a margem de fase vale $MF \cong 90^\circ$, que é maior que as margens de fase obtidas com os controladores P e PI.

Exemplo 6.1: Controlador PID

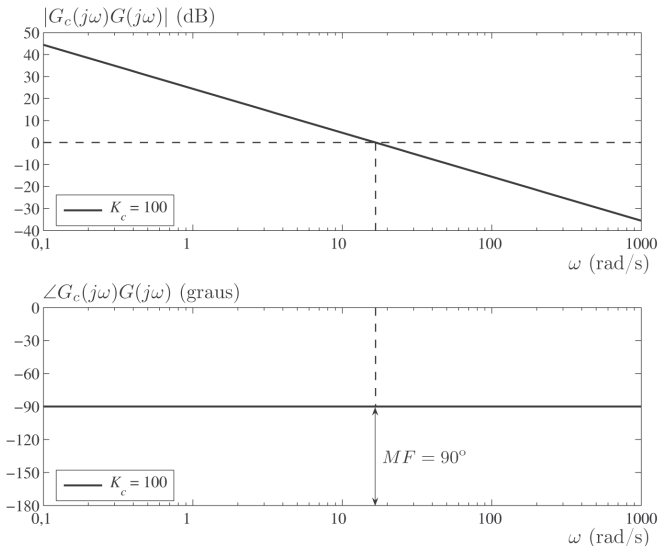


Figura 6.19 Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador PID.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 6.**