

# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

## Parte 3.4: Compensação por meio de Resposta em Frequência

**Professora:** Cecília de Freitas Morais

e-mails: `cfmorais@unicamp.br`

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

# Compensação por meio da resposta em frequência

- A compensação por meio da resposta em frequência é indicada quando as especificações de resposta do sistema são fornecidas em termos:
  - das margens de estabilidade (ganho e fase) e
  - do erro no estado estacionário (com a vantagem de que a restrição de erro estacionário é mais fácil de ser implementada no **domínio da frequência** do que por meio da técnica do **lugar das raízes**).

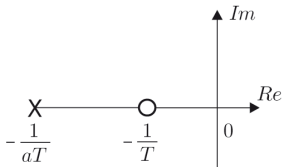
## Compensação por avanço de fase

# Compensação por avanço de fase

A compensação por avanço de fase (*phase lead*) por meio da resposta em frequência visa aumentar a margem de fase, o que reduz o sobressinal da resposta transitória. Além disso, a compensação aumenta a banda passante (a faixa de frequências de entrada que passam para a saída), tornando a resposta transitória mais rápida. O bloco típico de um compensador por avanço de fase projetado usando técnicas no domínio da frequência tem a função de transferência

$$G_c(s) = k \left( \frac{Ts + 1}{aTs + 1} \right), \quad \text{com} \quad 0 < a < 1. \quad (1)$$

O diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase é apresentado na Figura 5.42. O zero do compensador  $-1/T$  deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao polo  $-1/(aT)$ .



**Figura 5.42** Diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase.

# Compensação por avanço de fase

Os diagramas de Bode do compensador (1) estão apresentados na Figura 5.43. Note que o compensador possui fase positiva em todas as frequências. Daí a designação de avanço de fase. Com este compensador a fase sofre um acréscimo significativo apenas nas proximidades da frequência  $\omega_m$ . Já o ganho é menor em baixas frequências e maior em altas frequências.

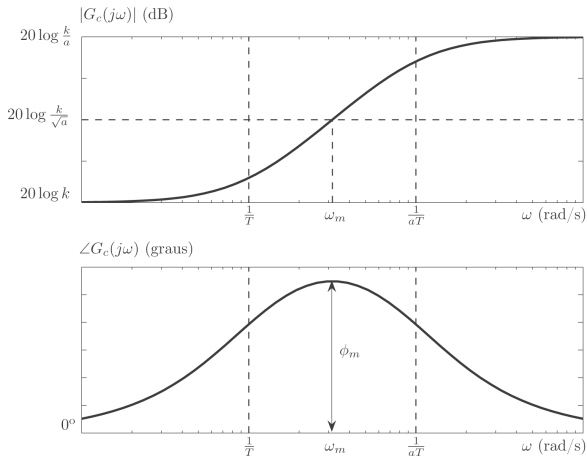


Figura 5.43 Diagramas de Bode do compensador por avanço de fase  $G_c(s)$ .

# Compensação por avanço de fase

Da Equação (1), tem-se que a fase  $\phi$  de  $G_c(j\omega)$  é dada por

$$\phi = \arctan(\omega T) - \arctan(a\omega T). \quad (2)$$

Derivando<sup>1</sup> a Equação (2) com relação a  $\omega$  e igualando a zero pode-se encontrar a frequência  $\omega_m$  onde ocorre a máxima fase  $\phi_m$  de  $G_c(j\omega)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} &= \left( \frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{aT}{1 + a^2 \omega^2 T^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_m} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\cancel{\mathcal{X}(1 + a^2 \omega_m^2 T^2)} - a\cancel{\mathcal{X}(1 + \omega_m^2 T^2)}}{\cancel{(1 + \omega_m^2 T^2)}\cancel{(1 + a^2 \omega_m^2 T^2)}} &\Rightarrow 1 + a^2 \omega_m^2 T^2 - a - a\omega_m^2 T^2 = 0 \Rightarrow \\ aT^2 \omega_m^2 (a - 1) &= a - 1 \Rightarrow \omega_m^2 = \frac{a - 1}{aT^2(a - 1)} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T}. \end{aligned} \quad (3)$$

Na frequência  $\omega_m$  tem-se que

$$G_c(j\omega_m) = k \left( \frac{Tj\omega_m + 1}{aTj\omega_m + 1} \right) = k \left( \frac{\frac{j}{\sqrt{a}} + 1}{\frac{ja}{\sqrt{a}} + 1} \right) = k \left( \frac{j + \sqrt{a}}{ja + \sqrt{a}} \right). \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>  $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

## Compensação por avanço de fase

Assim, considerando  $k > 0$ , o módulo de  $G_c(j\omega_m)$  é dado por

$$|G_c(j\omega_m)| = k \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{a^2+a}} = k \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a(a+1)}} = \frac{k}{\sqrt{a}}. \quad (5)$$

Antes de calcular a fase, vamos racionalizar  $G_c(j\omega_m)$  multiplicando o numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$G_c(j\omega_m) = k \left( \frac{j + \sqrt{a}}{ja + \sqrt{a}} \right) \left( \frac{-ja + \sqrt{a}}{-ja + \sqrt{a}} \right) = k \left( \frac{2a + j\sqrt{a}(1-a)}{a(1+a)} \right),$$

sabendo que a fase de  $G_c(j\omega_m)$  pode ser descrita por  $\text{sen}(\phi_m) = \frac{\text{Imag}(G_c(j\omega_m))}{|G_c(j\omega_m)|}$ ,  
tem-se

$$\text{sen}(\phi_m) = \frac{k \left( \frac{\sqrt{a}(1-a)}{a(1+a)} \right)}{\frac{k}{\sqrt{a}}} = k \left( \frac{\sqrt{a}(1-a)}{a(1+a)} \right) \frac{\sqrt{a}}{k} = \frac{\cancel{k}(1-a)}{\cancel{k}(1+a)} = \frac{1-a}{1+a}. \quad (6)$$

## Exemplo 5.11

Considere a função de transferência de um motor de corrente contínua cuja função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{5}{s(s+1)}, \quad (7)$$

sendo  $\Theta(s)$  e  $E_a(s)$  as transformadas de Laplace da posição angular do eixo ( $\theta(t)$ ) e da tensão de armadura ( $e_a(t)$ ), respectivamente.

Os gráficos de Bode do sistema (7) são apresentados na Figura 5.44 (no slide seguinte). A margem de fase é medida na frequência  $\omega \cong 2,1$  (rad/s) em que o ganho vale 0 (dB) e vale  $MF \cong 25,2^\circ$ . Já a margem de ganho é infinita, pois a curva de fase nunca atinge  $180^\circ$ .

## Exemplo 5.11

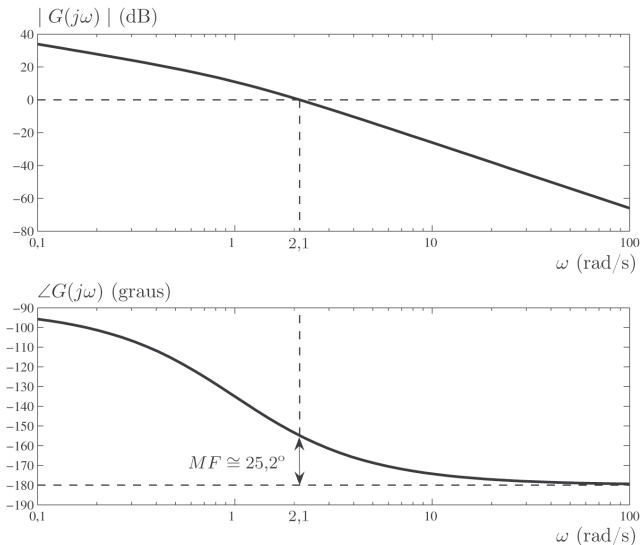


Figura 5.44 Gráficos de Bode do sistema  $G(s)$ .

## Exemplo 5.11

O sistema em malha fechada com realimentação unitária é apresentado na Figura 5.45.

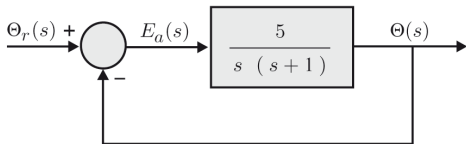


Figura 5.45 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador.

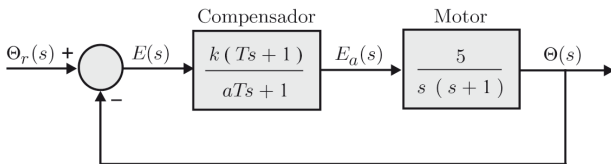
Aplicando-se uma rampa unitária na referência ( $\theta_r(t) = t \Rightarrow \Theta_r(s) = \frac{1}{s^2}$ ) o erro no estado estacionário  $e(\infty)$  vale

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \frac{5s}{s(s+1)}} = 0,2. \quad (8)$$

## Exemplo 5.11

Para melhorar a resposta do sistema deseja-se projetar um compensador  $G_c(s)$ , conforme representado na Figura 5.46, de modo que as seguintes especificações sejam satisfeitas:

- erro estacionário  $e(\infty) = 0,02$  para entrada de referência do tipo rampa unitária;
- margem de fase  $MF \cong 50^\circ$ .



**Figura 5.46** Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com compensador.

## Exemplo 5.11

A função de transferência de malha aberta  $G_{ma}(s)$  com compensador é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G(s) = k \frac{(Ts + 1)}{(aTs + 1)} \frac{5}{s(s + 1)}. \quad (9)$$

A constante  $k$  do compensador  $G_c(s)$  pode ser obtida a partir da especificação do erro estacionário, ou seja,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \frac{k(Ts+1)5}{(aTs+1)(s+1)}} = \frac{1}{5k} = 0,02. \quad (10)$$

Logo  $k = 10$  ou, em decibéis,  $k = 20 \log 10 = 20\text{dB}$ .

Os gráficos de Bode de  $kG(j\omega)$  são apresentados na Figura 5.47 (slide seguinte). Note que, com o ganho  $k$  do compensador, o gráfico do módulo desloca-se na direção vertical de  $k = 20\text{dB}$ . Logo, o ponto de cruzamento da curva de módulo em  $0\text{dB}$  (ganho 1) desloca-se para a direita, ocorrendo numa frequência mais alta em  $\omega \approx 7(\text{rad/s})$ . Com isso, a margem de fase é reduzida para  $MF \approx 8^\circ$ .

# Exemplo 5.11

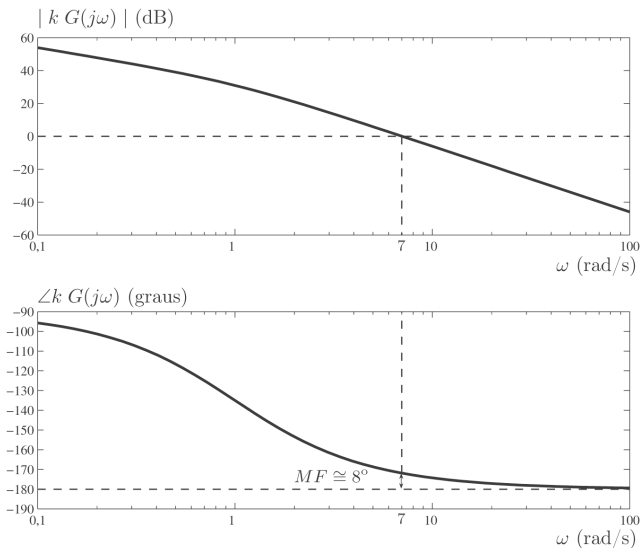


Figura 5.47 Gráficos de Bode de  $kG(j\omega)$ .

## Exemplo 5.11

A margem de fase é determinada pela frequência de cruzamento em que o ganho do sistema em malha aberta vale 1 ou 0dB.

Assim, para que a margem de fase seja de  $50^\circ$  o compensador deve fornecer uma fase de pelo menos  $50^\circ - 8^\circ = 42^\circ$ .

Porém, conforme se pode perceber no gráfico do módulo de  $G_c(j\omega)$  da Figura 5.43, o ganho do compensador cresce a partir da frequência  $1/T$ , fazendo com que a frequência de cruzamento de ganho 1 do sistema em malha aberta seja deslocada para a direita.

Logo, o avanço de fase máximo  $\phi_m$  a ser fornecido pelo compensador deve ser na realidade um pouco maior que  $42^\circ$ .

Adotando uma parcela de correção<sup>2</sup> de  $3^\circ$  a mais, então

$$\phi_m \cong 50^\circ - 8^\circ + 3^\circ \cong 45^\circ.$$

---

<sup>2</sup>Caso esta correção não produza um resultado satisfatório, o projeto do compensador deve ser refeito.

## Exemplo 5.11

Da Equação (31) obtém-se o valor de  $a$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\phi_m) &= \frac{1-a}{1+a} \Rightarrow \operatorname{sen}(\phi_m) + a\operatorname{sen}(\phi_m) = 1-a \Rightarrow \\ a(\operatorname{sen}(\phi_m) + 1) &= 1 - \operatorname{sen}(\phi_m) \Rightarrow a = \frac{1 - \operatorname{sen}(\phi_m)}{1 + \operatorname{sen}(\phi_m)} \Rightarrow \quad (11) \\ a &\approx \frac{1 - 0,707}{1 + 0,707} \Rightarrow a = 0,172,\end{aligned}$$

e da Equação (5) obtém-se

$$|G_c(j\omega_m)| = \frac{k}{\sqrt{a}} \approx \frac{10}{\sqrt{0,172}} \approx 24,1. \quad (12)$$

Na frequência  $\omega_m$  o ganho de malha aberta deve ser igual a 1 ou 0dB, ou seja,

$$|G_{ma}(j\omega_m)| = |G_c(j\omega_m)| |G(j\omega_m)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega_m)| = \frac{1}{|G_c(j\omega_m)|}. \quad (13)$$

## Exemplo 5.11

Logo, o módulo do sistema não compensado deve valer, na frequência  $\omega_m$ ,

$$\begin{aligned} |G(j\omega_m)| &= \left| \frac{5}{j\omega_m(j\omega_m + 1)} \right| = \frac{1}{|G_c(j\omega_m)|} \Rightarrow \frac{5}{|-\omega_m^2 + j\omega_m|} = \frac{1}{24,1} \Rightarrow \\ 5 \cdot 24,1 &= \sqrt{\omega_m^4 + \omega_m^2} \Rightarrow \omega_m^4 + \omega_m^2 - 120,5^2 = 0 \Rightarrow \\ \omega_m^2 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-120,5^2)}}{2} = \frac{-1 \pm 241,0021}{2} = \begin{cases} +120.001 \\ -121.001 \end{cases} \quad (14) \\ \omega_m &= \sqrt{121.001} \approx 10,9 \text{ (rad/s)}, \quad \text{pois } \omega_m \text{ deve ser real e positivo.} \end{aligned}$$

Da Equação (3) obtém-se o valor de  $T$ , ou seja,

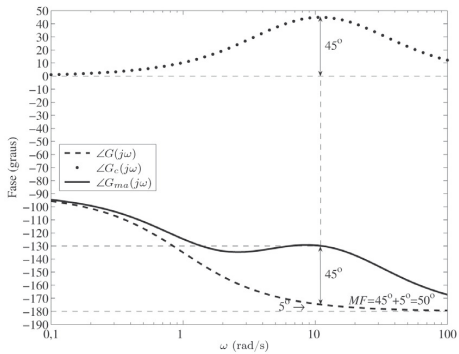
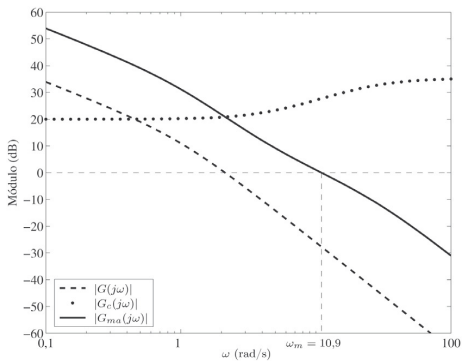
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_m} = \frac{1}{10,9\sqrt{0,172}} \approx 0,221. \quad (15)$$

Portanto, a função de transferência do compensador que satisfaz às especificações é dada por

$$G_c(s) = \frac{10(0,221s + 1)}{0,038s + 1}. \quad (16)$$

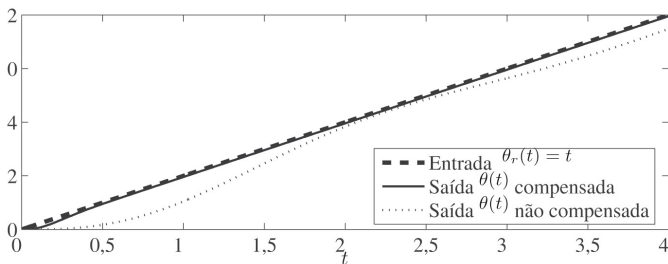
Os gráficos de Bode do sistema em malha aberta compensado

$G_{ma}(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)$ , mostrando a margem de fase  $MF \approx 50^\circ$ , são apresentados na Figura 5.48 (slide seguinte).



## Exemplo 5.11

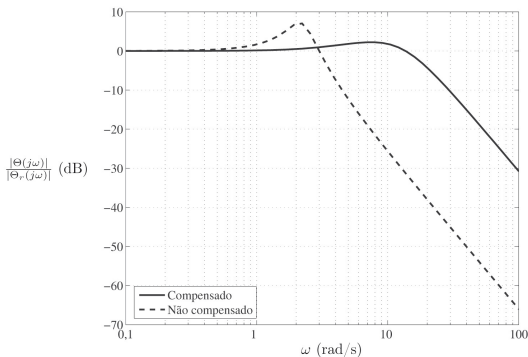
Na Figura 5.49 são apresentados os gráficos das respostas transitórias dos sistemas em malha fechada compensado e não compensado para uma entrada de referência do tipo rampa unitária ( $\theta_r(t) = t \Rightarrow \Theta_r(s) = 1/s^2$ ). Note a redução do erro no estado estacionário.



**Figura 5.49** Saídas compensada e não compensada dos sistemas em malha fechada para entrada do tipo rampa unitária.

## Exemplo 5.11

Como a frequência de ganho 1 ou 0dB do sistema em malha aberta aumentou de 2,1 para 10,9(rad/s), a resposta transitória do sistema compensado ficou mais rápida. Isso também pode ser verificado por meio de uma comparação das respostas em frequência dos sistemas em malha fechada compensado e não compensado da Figura 5.50. Note que a banda passante do sistema compensado é maior que a do não compensado. Além disso, o aumento da margem de fase para  $50^\circ$  possibilitou uma redução significativa do pico de ressonância.



**Figura 5.50** Respostas em frequência dos sistemas em malha fechada compensado e não compensado.

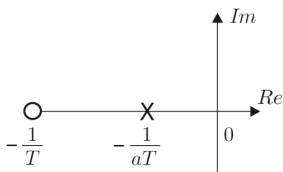
## Compensação por atraso de fase

## Compensação por atraso de fase

O bloco típico de um compensador por atraso de fase (*lag phase*) tem a função de transferência

$$G_c(s) = k \left( \frac{Ts + 1}{aTs + 1} \right), \quad \text{com} \quad a > 1. \quad (17)$$

O diagrama de polos e zeros de um compensador por atrasos de fase é apresentado na Figura 5.51. O polo compensador  $-1/(aT)$  deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao zero  $-1/T$ .



**Figura 5.51** Diagrama de polos e zeros de um compensador por atraso de fase.

# Compensação por atraso de fase

Os diagramas de Bode do compensador (17) estão apresentados na Figura 5.52.

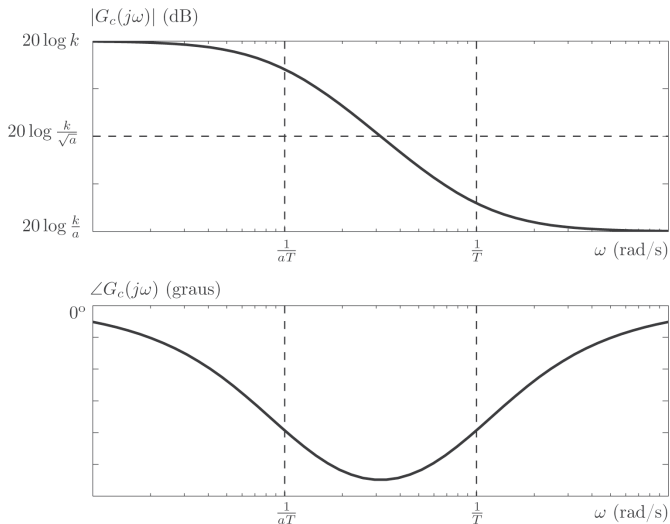


Figura 5.52 Diagramas de Bode do compensador por atraso de fase  $G_c(j\omega)$ .

## Compensação por atraso de fase

- Note que o compensador possui fase negativa em todas as frequências, daí a designação de atraso de fase.
- Apesar do título *atraso de fase*, a utilidade desse compensador não está relacionada à fase, mas sim ao ajuste de ganho que possibilita.
- Como o ganho é maior em baixas frequências e menor em altas, o compensador pode ser empregado para **reduzir o ganho em altas frequências** para melhorar a margem de fase e a consequente resposta transitória, ou, inversamente, **manter a margem de fase e aumentar o ganho em baixas frequências para reduzir o erro estacionário**.
- A dificuldade do método consiste no fato de que na região onde o ganho do compensador decresce ele introduz defasagem negativa, isto é, instabilizante. Por isso essa região deve ser colocada bem abaixo da região crítica, onde o ganho vale 1.
- Já a redução do ganho em altas frequências diminui a banda passante, prejudicando a rapidez com que o sistema reproduz o sinal de referência.

## Exemplo 5.12

Considere um sistema com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{40}{(s + 1)^2(s + 10)}. \quad (18)$$

Os diagramas de Bode do sistema (18) são apresentados na Figura 5.54.

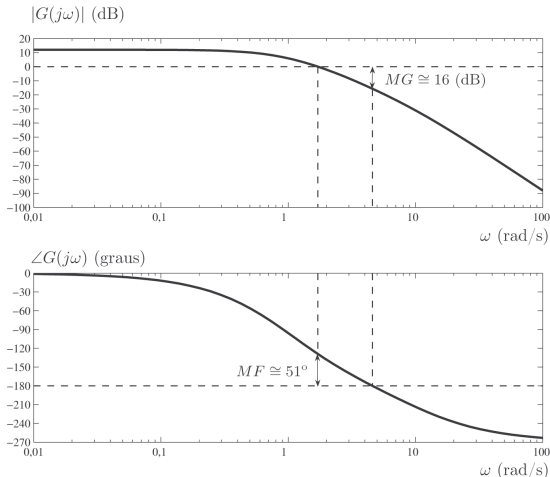


Figura 5.54 Diagramas de Bode da função  $G(j\omega)$  (5.140).

## Exemplo 5.12

A partir destes gráficos obtêm-se as seguintes margens de estabilidade:  $MG \cong 16\text{dB}$  e  $MF \cong 51^\circ$ . Portanto, este sistema em malha fechada é estável ( $MG > 0$  e  $MF > 0$ ). O diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador é apresentado na Figura 5.53.

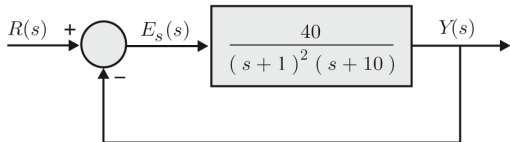


Figura 5.53 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador.

Aplicando-se um degrau unitário na referência ( $r(t) = 1 \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$ ), o erro estacionário  $e_s(\infty)$  sem compensador é

$$e_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1 + 4} = 0,2. \quad (19)$$

## Exemplo 5.12

Deseja-se projetar um compensador  $G_c(s)$  por atraso de fase de modo a reduzir o erro estacionário em 10 vezes ( $e_s(\infty) = 0,02$ ), mantendo o valor da margem da fase ( $MF = 51^\circ$ ). A função de transferência de malha aberta com o compensador  $G_c(s)$  é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G(s) = \frac{k(Ts + 1)}{(aTs + 1)} \frac{40}{(s + 1)^2(s + 10)}. \quad (20)$$

O erro estacionário  $e_c(\infty)$  com compensador vale

$$\begin{aligned} e_c(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k(Ts+1)40}{(aTs+1)(s+1)^2(s+10)}} \\ &= \frac{1}{1 + 4k} = 0,02 \Rightarrow \frac{1}{0,02} = 1 + 4k \Rightarrow k = \frac{50 - 1}{4} = 12,25. \quad (21) \end{aligned}$$

## Exemplo 5.12

Na Figura 5.55 são apresentados os gráficos de Bode de  $kG(j\omega)$ .

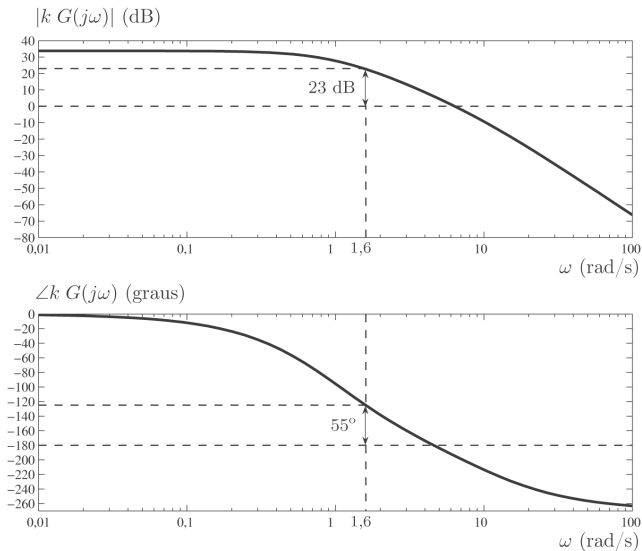


Figura 5.55 Diagramas de Bode da função  $kG(j\omega)$ .

## Exemplo 5.12

Como o compensador possui fase negativa, quando este for incluído na malha ocorrerá uma redução na margem de fase. Prevendo esse efeito é necessário ajustar a margem de fase num valor maior que o desejado para realizar o cálculo do compensador<sup>3</sup>. Por essa razão, neste exemplo a margem de fase é ajustada para  $55^\circ$  (em vez de  $51^\circ$  que era o valor original).

Em seguida deve-se encontrar a frequência que determina a margem de fase  $MF \cong 55^\circ$  ajustada. No gráfico de fase da Figura 5.55 verifica-se que a fase da curva de  $kG(j\omega)$ , que vale  $-180^\circ + 55^\circ = -125^\circ$ , ocorre na frequência  $\omega \cong 1,6(\text{rad/s})$ .

Nesta frequência o módulo de  $kG(j\omega)$  vale aproximadamente  $+23\text{dB}$ . Portanto, o compensador deve fornecer uma redução de ganho de  $-23\text{dB}$ , ou seja,

$$20 \log \left| \frac{Tj\omega + 1}{aTj\omega + 1} \right| = -23\text{dB} \Rightarrow \left| \frac{Tj\omega + 1}{aTj\omega + 1} \right| = 10^{-23/20} = 0,0708. \quad (22)$$

---

<sup>3</sup>Na prática este ajuste pode ser até  $10^\circ$  maior. Caso os resultados não sejam satisfatórios, o projeto do compensador deve ser refeito.

## Exemplo 5.12

Em altas frequências tem-se que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{Tj\omega + 1}{aTj\omega + 1} \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{Tj + \frac{1}{\omega}}{aTj + \frac{1}{\omega}} \right| = \frac{1}{a} = 0,0708 \Rightarrow a \cong 14,1254. \quad (23)$$

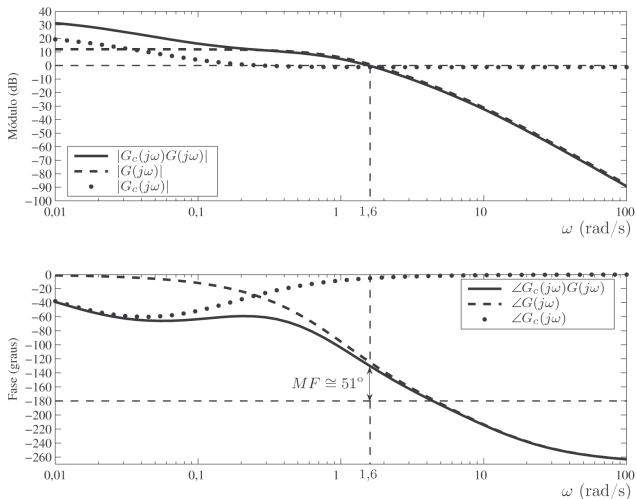
Para não reduzir a margem de fase, o zero do compensador deve ser escolhido abaixo da frequência crítica  $\omega \cong 1,6(\text{rad/s})$ . Escolhendo o zero uma década abaixo desta frequência, obtém-se  $s = -1/T = -0,16 \Rightarrow T = 6,25$ .

Logo, a função de transferência do compensador resulta como

$$G_c(s) = \frac{k(Ts + 1)}{aTs + 1} = \frac{12,25(6,25s + 1)}{88,28s + 1} = \frac{0,8672(s + 0,16)}{s + 0,0113}. \quad (24)$$

Na Figura 5.56 (slide seguinte) são apresentados os diagramas de Bode do sistema não compensado  $G(j\omega)$ , do sistema compensado  $G_c(j\omega)G(j\omega)$  e do compensador  $G_c(j\omega)$ . Note que em baixas frequências o ganho do sistema compensado é maior que o do sistema não compensado, possibilitando assim reduzir o erro estacionário. Na frequência de ganho 1 ou 0dB a margem de fase resultante do sistema compensado é a mesma do sistema não compensado ( $MF \cong 51^\circ$ ), permitindo, dessa forma, obter respostas transitórias semelhantes.

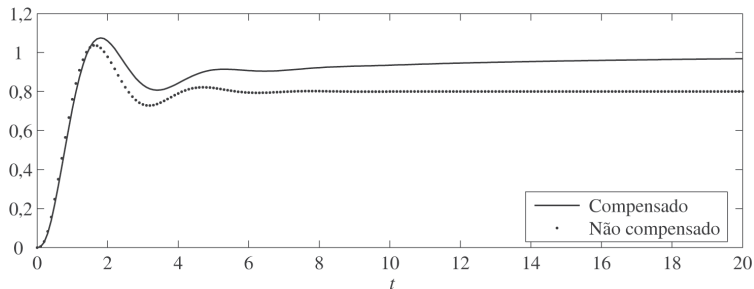
## Exemplo 5.12



**Figura 5.56** Diagramas de Bode do sistema não compensado  $G(j\omega)$ , do sistema compensado  $G_c(j\omega)G(j\omega)$  e do compensador  $G_c(j\omega)$ .

## Exemplo 5.12

Na Figura 5.57 são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado. Note que as respostas transitórias têm sobressinal semelhante, porém o erro estacionário da resposta do sistema compensado é bem menor.



**Figura 5.57** Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado.

## Compensação por avanço e atraso de fase (lead-lag)

## Compensação por avanço e atraso de fase

A compensação por avanço e atraso de fase (*lead-lag phase*) aplica os dois recursos analisados anteriormente. Esta compensação é indicada quando é necessário melhorar simultaneamente as margens de estabilidade e o erro no estado estacionário.

Em vez de usar funções de transferências individuais com amplificadores individuais para o avanço e para o atraso, pode-se usar uma função de transferência única com apenas um amplificador  $k$ . A função de transferência do compensador por avanço e atraso de fase é dada por

$$\begin{aligned} G_c(s) &= kG_{av}(s)G_{at}(s) \\ &= k \left( \frac{T_1s + 1}{\frac{T_1}{\alpha}s + 1} \right) \left( \frac{T_2s + 1}{\alpha T_2s + 1} \right) \\ &= k \left( \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\alpha}{T_1}} \right) \left( \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\alpha T_2}} \right), \quad \text{com } \alpha > 1 \quad \text{e} \quad T_1 < T_2. \quad (25) \end{aligned}$$

## Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência responsável pelo avanço de fase na Equação (25) é

$$G_{av}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\alpha}{T_1}} \quad (26)$$

e a função de transferência responsável pelo atraso de fase é

$$G_{at}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\alpha T_2}}. \quad (27)$$

- Para projetar um compensador por avanço e atraso de fase primeiramente calcula-se o ganho do amplificador  $k$ , que fornece o erro estacionário desejado.
- Em seguida projeta-se o compensador por atraso de fase  $G_{at}(s)$  para reduzir o ganho em altas frequências e, com isso, atenuar ruídos presentes na maioria dos atuadores e instrumentos de medição.
- Por fim, projeta-se o compensador por avanço de fase  $G_{av}(s)$  para satisfazer à especificação da margem de fase.

# Compensação por avanço e atraso de fase

Na Figura 5.58 são apresentados os diagramas de Bode do compensador por avanço e atraso de fase  $G_c(j\omega)$ .

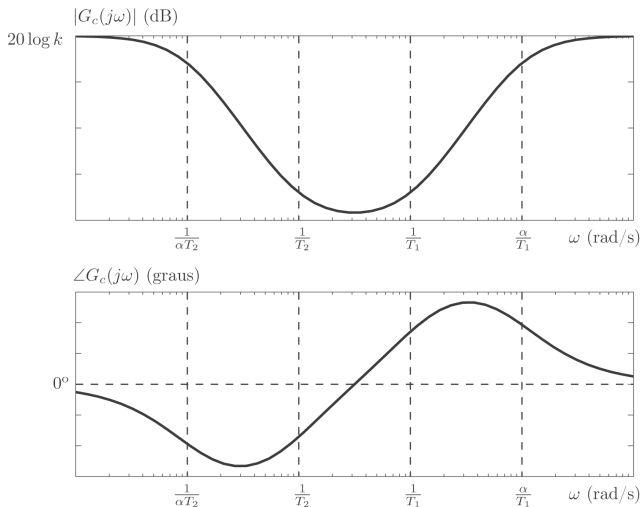
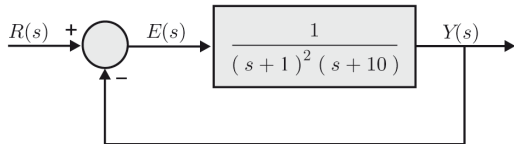


Figura 5.58 Diagramas de Bode do compensador por avanço e atraso de fase  $G_c(j\omega)$ .

## Exemplo 5.13

Projete um compensador por avanço e atraso de fase para o sistema da Figura 5.59, tal que:

- a resposta para entrada do tipo degrau na referência apresente erro estacionário de 0,02;
- a margem de fase seja de  $50^\circ$ .



**Figura 5.59** Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada sem compensador.

## Exemplo 5.13

A função de transferência de malha aberta com o compensador por avanço e atraso de fase é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G(s) = \frac{k \left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\alpha T_2}\right)} \frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \quad (28)$$

sendo  $G(s)$  a função de transferência da planta.

O erro estacionário  $e(\infty)$  para entrada do tipo degrau na referência vale

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k \left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\alpha T_2}\right) (s+1)^2 (s+10)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{k}{10}} = 0,02 \Rightarrow \frac{1}{0,02} = 1 + \frac{k}{10} \Rightarrow k = (50 - 1) \cdot 10 \Rightarrow k = 490. \end{aligned} \quad (29)$$

## Exemplo 5.13

Os diagramas de Bode de  $kG(j\omega)$  são apresentados na Figura 5.60. As margens de estabilidade mostradas nesse gráficos são  $MF \cong -15^\circ$  e  $MG \cong -6\text{dB}$ . Logo, apenas com o ajuste do ganho  $k$  o sistema em malha fechada é instável.

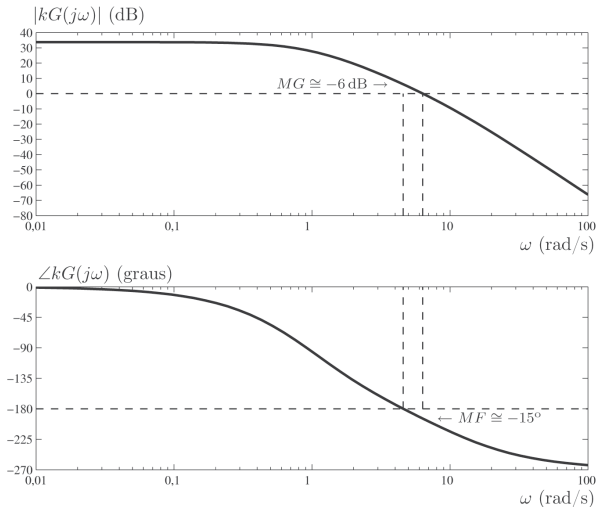


Figura 5.60 Gráficos de Bode de  $kG(j\omega)$ .

## Exemplo 5.13

Para obter uma margem de fase de  $50^\circ$  é necessário o projeto de um compensador por avanço e atraso de fase. O compensador por avanço  $G_{av}(s)$  melhora a margem de fase, mas aumenta o ganho em altas frequências que, por sua vez, é reduzido com o compensador por atraso  $G_{at}(s)$ .

A margem de fase é medida na frequência de corte  $\omega_c$  em que o ganho vale 1 ou 0dB. O próximo passo é escolher esta frequência, de modo que o sistema com o compensador  $G_c(s)$  tenha uma margem de fase  $MF = 50^\circ$ . Assim,

$$\begin{aligned} MF &= 180^\circ + \angle G_{ma}(j\omega_c) \\ &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) + \angle G_c(j\omega_c) \\ &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) + \angle G_{at}(j\omega_c) + \angle G_{av}(j\omega_c) \end{aligned} \quad (30)$$

## Exemplo 5.13

Supõe-se que a margem de fase de  $50^\circ$  seja completamente fornecida pelo compensador por avanço, isto é,  $\angle G_{av}(j\omega_c) = 50^\circ$ , e que o atraso de fase do compensador  $G_{at}(s)$ , na frequência de corte, seja aproximadamente<sup>4</sup>  $\angle G_{at}(j\omega_c) \cong -5^\circ$ . Então, a frequência de corte escolhida irá ocorrer onde a fase da planta é  $\angle G(j\omega_c) = -175^\circ$ . Da Figura 5.61 obtém-se que a frequência de corte vale  $\omega_c \cong 4,1$  (rad/s).

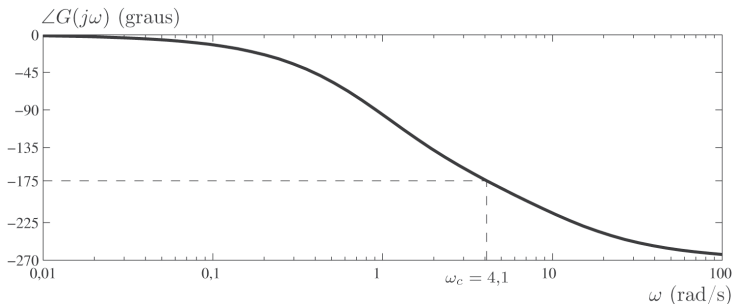


Figura 5.61 Fase de  $G(j\omega)$  em função da frequência.

<sup>4</sup>Caso esta aproximação não seja satisfatória, o projeto do compensador deve ser refeito.

## Exemplo 5.13

O compensador por atraso de fase  $G_{at}(s)$  deve ser projetado de modo a não afetar a margem de fase. Assim, a frequência de corte superior de  $G_{at}(s)$  é escolhida uma década abaixo da frequência de corte  $\omega_c$ , onde é medida a margem de fase, ou seja,  $1/T_2 = 0,41(\text{rad/s})$ .

O valor de  $\alpha$  é calculado a partir do ângulo de fase  $\phi_m = MF = 50^\circ$  a ser fornecido pelo compensador por avanço  $G_{av}(s)$ . Da Equação

$$\text{sen}(\phi_m) = \frac{1 - a}{1 + a} \quad (31)$$

tem-se que, como  $a = 1/\alpha$ , então,

$$\text{sen}(\phi_m) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \text{sen}(\phi_m)}{1 - \text{sen}(\phi_m)} = \frac{1 + \text{sen}(50^\circ)}{1 - \text{sen}(50^\circ)} \Rightarrow \alpha = 7,5486. \quad (32)$$

## Exemplo 5.13

Logo, a função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_{at}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\alpha T_2}} = \frac{s + 0,41}{s + 0,0543}. \quad (33)$$

A fase máxima  $\phi_m$  do compensador por avanço de fase  $G_{av}(s)$  deve ocorrer na frequência de corte  $\omega_c$ . Da Equação  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T}$  tem-se que

$$\omega_m = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{a}T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_c} \approx 0,67 \quad (34)$$

Logo, a função de transferência do compensador por avanço de fase é

$$G_{av}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\alpha}{T_1}} = \frac{s + 1,4923}{s + 11,2647} \quad (35)$$

## Exemplo 5.13

Na Figura 5.62 é apresentado o gráfico de fase de  $G_{av}(j\omega)$ , mostrando  $\phi_m = 50^\circ$ .

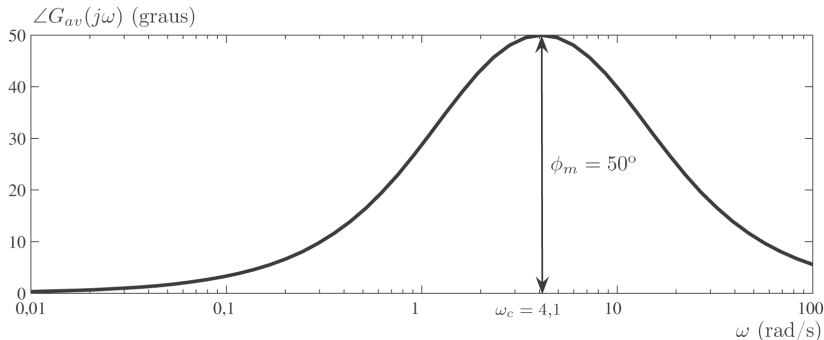


Figura 5.62 Fase de  $G(j\omega)$  em função da frequência.

A função de transferência do compensador por avanço e atraso de fase é dada por

$$G_c(s) = kG_{av}(s)G_{at}(s) = 490 \left( \frac{s + 1,4923}{s + 11,2647} \right) \left( \frac{s + 0,41}{s + 0,0543} \right). \quad (36)$$

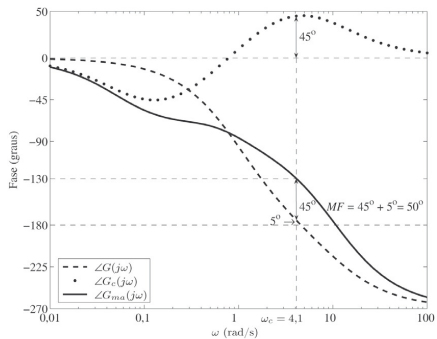
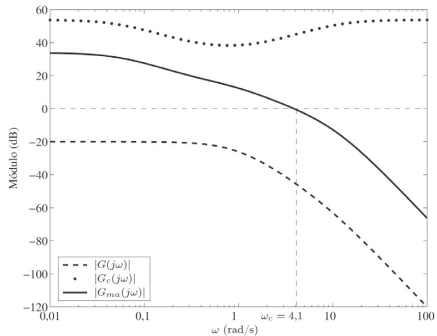


Figura 5.63 Gráficos de Bode de  $G(j\omega)$ ,  $G_c(j\omega)$  e  $G_{ma}(j\omega)$ .

## Exemplo 5.13

Na Figura 5.63 são apresentados os diagramas de Bode da planta  $G(j\omega)$ , do compensador por avanço e atraso de fase  $G_c(j\omega)$  e da função de transferência de malha aberta  $G_{ma}(j\omega)$ . A margem de fase é dada por

$$\begin{aligned} MF &= 180^\circ + \angle G_{ma}(j\omega_c) \\ &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) + \angle G_c(j\omega_c) \\ &= 180^\circ - 175^\circ + 45^\circ = 50^\circ, \end{aligned} \quad (37)$$

sendo  $\angle G_c(j\omega_c) = \angle G_{at}(j\omega_c) + \angle G_{av}(j\omega_c) = -5^\circ + 50^\circ = 45^\circ$ .

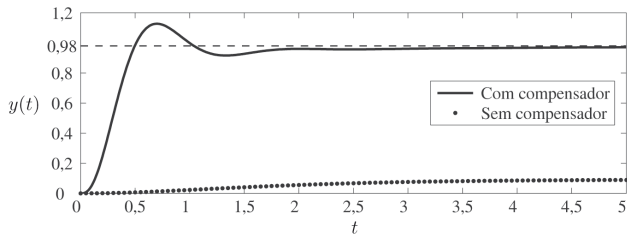
A função de transferência do sistema em malha fechada com compensador é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{490(s + 1,4923)(s + 0,41)}{s^5 + 23,32s^4 + 157,44s^3 + 745,04s^2 + 1058,16s + 305,92} \\ &= \frac{490(s + 1,4923)(s + 0,41)}{(s + 0,3859)(s + 1,5612)(s + 16,1928)(s + 2,5895 \pm 4,9653j)}, \end{aligned} \quad (38)$$

que é um sistema de quinta ordem.

## Exemplo 5.13

Na Figura 5.64 são apresentadas as respostas ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada com compensador e sem compensador. Note que o erro estacionário está de acordo com o especificado, ou seja,  $e(\infty) = 1 - 0,98 = 0,02$ .



**Figura 5.64** Respostas ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada com compensador e sem compensador.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.  
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 5.**