

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 3.3: Margens de estabilidade

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Margens de estabilidade

As principais vantagens em estudar a estabilidade de um sistema a partir da sua resposta em frequência são:

- pode ser aplicada tanto para a função de transferência calculada como para a resposta em frequência medida experimentalmente, que muitas vezes é mais fácil de ser obtida;
- fornece uma indicação de margens de segurança nos sistemas estáveis em malha fechada, tais como variações máximas no ganho CC (baixas frequências) ou em quaisquer parâmetros, que o sistema tolera sem perder a estabilidade;
- sugere modificações no sistema para evitar a instabilidade ou melhorar o desempenho;
- generalidade, que permite analisar sistemas com funções de transferências com atrasos puros e sistemas com múltiplas malhas.

Margens de estabilidade

Considere o sistema em malha fechada da Figura 5.24.

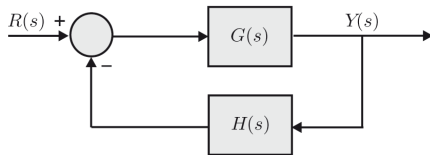


Figura 5.24 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G_{ma}(s) = G(s)H(s). \quad (1)$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (2)$$

Os polos de malha fechada são as raízes da equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow G(s)H(s) = -1$$

$$G_{ma}(s) = -1 + j0 = 1 \angle -180^\circ \quad (3)$$

$$|G_{ma}(j\omega)| = 1 \quad \text{e} \quad \angle G_{ma}(j\omega) = -180^\circ$$

Margens de estabilidade (Margem de Ganho – MG)

Margem de Ganho (MG)

A margem de ganho MG indica quantas vezes o módulo da função de transferência de um sistema em malha aberta ($G_{ma}(s) = G(s)H(s)$), na frequência ω em que a fase é -180° , deve ser aumentado ou diminuído para que o sistema passe pelo ponto crítico $-1 + j0$, ou seja,

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|} \text{ na frequência } \omega$$

em que $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ$. (4)

Na Figura 5.32 estão representadas partes dos diagramas polares de sistemas em malha aberta de fase mínima e que não têm polos no semi-plano direito de s .

Para sistemas de fase mínima, se $|G(j\omega)H(j\omega)| < 1$ o sistema em malha fechada é estável.

Porém, para $|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$ o sistema em malha fechada é instável.

Margem de Fase (MF)

A margem de fase MF indica quanto a fase de um sistema em malha aberta, na frequência em que o módulo é igual a 1, deve ser variada para que o sistema passe pelo ponto crítico $-1 + j0$, ou seja,

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega)H(j\omega) \text{ na frequência } \omega$$

em que $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$. (5)

O sistema em malha fechada é estável se $MF > 0$, e é instável se $MF \leq 0$.

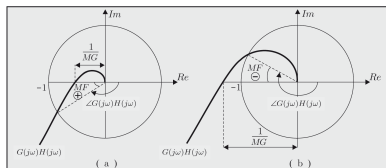


Figura 5.32 (a) Sistema em malha fechada estável. (b) Sistema em malha fechada instável.

Margens de estabilidade

Para sistemas de malha aberta estáveis ($G_{ma}(s) = G(s)H(s)$) as margens de estabilidade podem ser medidas nos diagramas de Bode, conforme é mostrado na Figura 5.33. Neste caso a margem de ganho é expressa em decibéis no gráfico do módulo.

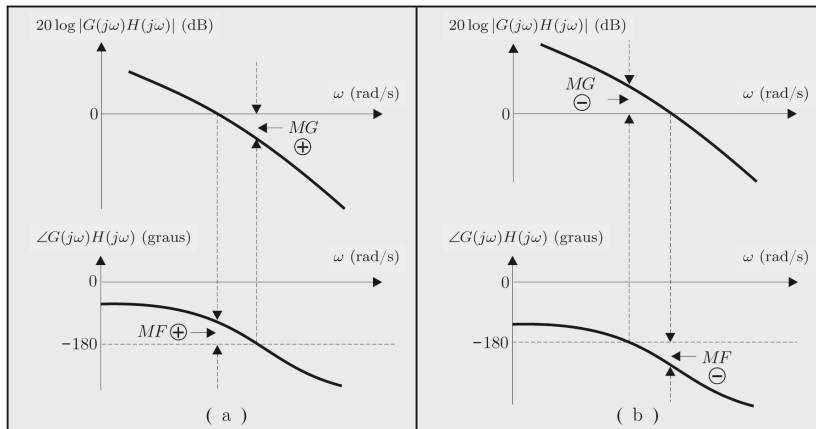


Figura 5.33 (a) Sistema em malha fechada estável. (b) Sistema em malha fechada instável.

Margens de estabilidade

Em decibéis a margem de ganho é dada por

$$MG(dB) = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|} = -20 \log |G(j\omega)H(j\omega)|, \quad (6)$$

na frequência ω em que $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ$.

Da Equação (6):

- se $|G(j\omega)H(j\omega)| < 1$ então a margem de ganho em dB é positiva, e o sistema em malha-fechada é estável;
- se $|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$, a margem de ganho em dB é negativa e o sistema em malha-fechada é instável.

Observação 1:

De acordo com a Figura 5.33, um sistema é estável em malha fechada se as margens de ganho e fase forem positivas. Caso contrário o sistema em malha fechada é instável.

Observação 2:

Sistemas de primeira e segunda ordens possuem margem de ganho infinita, pois a fase nunca atinge -180° .

Banda passante e frequência de corte

- A banda passante, ou faixa de passagem, é a faixa de frequências na qual um sistema $G(j\omega)$ é capaz de responder substancialmente à excitação dos sinais de entrada.
- Essa faixa é limitada pela frequência de corte ω_c do sistema.
- A frequência de corte ω_c é definida como aquela em que o ganho cai a $1/\sqrt{2}$ (71%) do ganho em baixas frequências, que corresponde à transmissão de 50% de potência. Em decibéis este valor corresponde a -3dB.
- A frequência de corte fornece uma fronteira adequada para a supressão de ruídos de altas frequências por meio de filtros. Tais ruídos estão presentes na maioria dos atuadores e instrumentos de medição dos processos.

A banda passante e a frequência de corte estão indicadas na Figura 5.40.

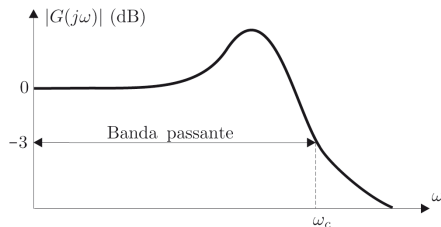


Figura 5.40 Banda passante e frequência de corte.

Exemplo 5.10

Considere dois sistemas de primeira ordem com função de transferência

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{e} \quad G_2(s) = \frac{1}{2s+1}.$$

As respostas em frequência destes dois sistemas estão apresentadas na Figura 5.41 (a). Note que o sistema $G_1(s)$ tem uma banda passante maior ($\omega_c = 1$), pois o seu polo está localizado em $s = -1$, enquanto o sistema $G_2(s)$ tem uma banda passante menor ($\omega_c = 0,5$), pois o seu polo está localizado em $s = -0,5$. Com isso, a resposta ao degrau unitário do sistema $G_1(s)$ é mais rápida que a do sistema $G_2(s)$. Isso é o que pode ser verificado na Figura 5.41 (b) por meio das saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos sistemas $G_1(s)$ e $G_2(s)$, respectivamente.

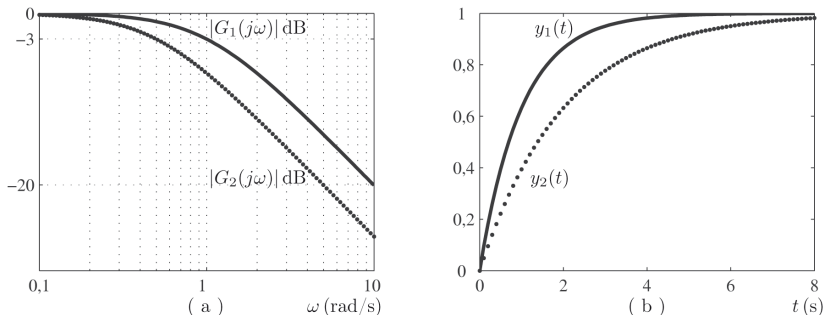


Figura 5.41 (a) Resposta em frequência. (b) Resposta ao degrau unitário.

Exercício

Considere o sistema em malha fechada da figura abaixo.

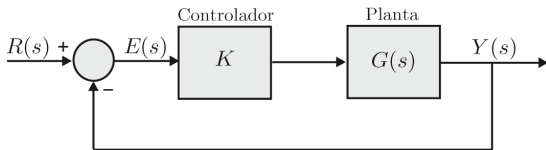


Figura 5.73 Sistema em malha fechada.

Determine o valor do ganho K para que a margem de fase seja de 45° , para isso considere os diagramas de Bode da planta $G(s)$ apresentados no slide a seguir.

Exercício

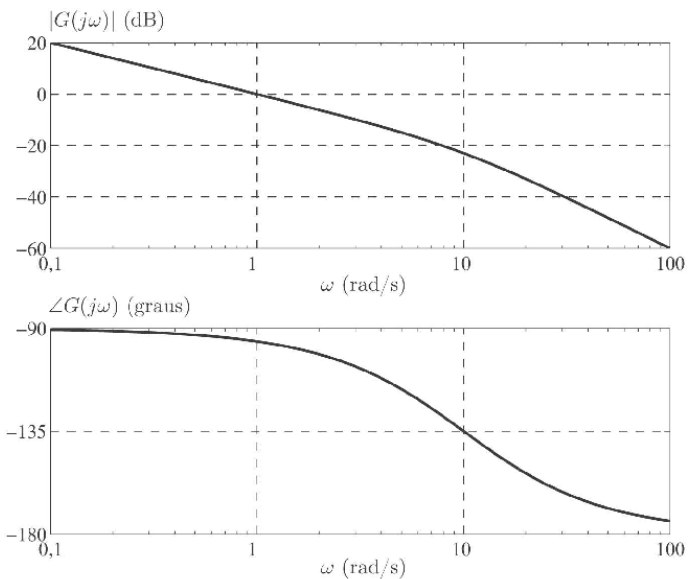


Figura 5.74 Diagramas de Bode da planta $G(j\omega)$.

Para que a margem de fase seja $MF = 45^\circ$, a fase de $G(j\omega)$ deve valer:

$$\angle G(j\omega) = MF - 180^\circ = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$

Olhando no gráfico $\angle G(j\omega) = -135^\circ$ ocorre na frequência $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Nesta frequência tem-se que $|G(\omega)|_{dB} = -23 \text{ dB}$.

Para que o ganho do gráfico do módulo seja 0 dB na frequência 10 rad/s, o ganho K do controlador deve valer 23 dB (elevando o gráfico de módulo do diagrama de Bode), ou seja,

$$20 \log(K) = 23 \Rightarrow K = 10^{23/20} = 10^{1,15} = 14,12.$$

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 5.**