

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 3.2: Diagramas e Critério de Estabilidade de Nyquist

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Diagramas de Nyquist

São diagramas polares que permitem representar as respostas em frequência (módulo e fase) num único gráfico. Considere, por exemplo, o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}. \quad (1)$$

O módulo de $G(j\omega)$ é dado por

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \quad (2)$$

e a fase de $G(j\omega)$ por

$$\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega T). \quad (3)$$

Para desenhar o diagrama polar da função $G(j\omega)$ basta calcular o módulo e a fase de $G(j\omega)$ para frequência $0 \leq \omega \leq \infty$.

Na tabela abaixo são apresentados alguns valores do módulo e da fase de $G(j\omega)$.

Tabela: Módulo e fase da função $G(j\omega)$ (1)

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	1	0°
$1/T$	$1/\sqrt{2}$	-45°
∞	0	-90°

Prova-se que o diagrama de Nyquist da função $G(j\omega)$ (1) é uma semicircunferência, conforme representado na Figura 5.21.

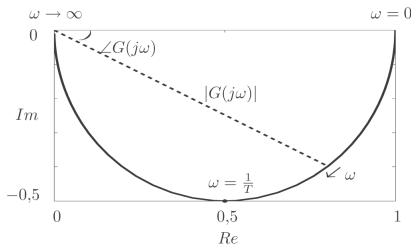


Figura 5.21 Diagrama de Nyquist da função $G(j\omega)$ (5.76).

Diagramas de Nyquist

Considere agora a função de transferência de um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (4)$$

O módulo de $G(j\omega)$ é dado por

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

e a fase de $G(j\omega)$ por

$$\angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right). \quad (6)$$

Na tabela abaixo são apresentados alguns valores do módulo e da fase de $G(j\omega)$ para algumas frequências $0 \leq \omega < \infty$.

Tabela: Módulo e fase da função $G(j\omega)$ (4)

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	1	0°
ω_n	$1/(2\xi)$	-90°
∞	0	-180°

Os diagramas de Nyquist da função $G(j\omega)$ (4) para $\xi = 0,5$ e $\xi = 1$ são apresentados na Figura 5.22.

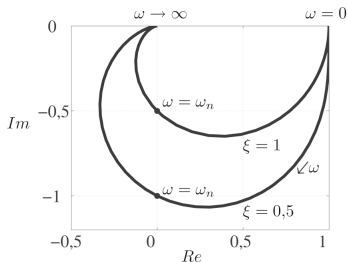


Figura 5.22 Diagrama de Nyquist da função $G(j\omega)$ (5.79).

Estabilidade de sistemas com realimentação

- No Capítulo 3 do livro texto é estudada a BIBO estabilidade de sistemas lineares por meio da condição necessária e suficiente de que os seus polos estejam localizados no semiplano esquerdo aberto do plano s .
- Respostas em frequência de sistemas instáveis não tem significado físico, pois não são mensuráveis. Uma vez energizados estes sistemas, qualquer excitação ou ruído é suficiente para levar a saída a disparar até valores infinitos, seja com crescimento monotônico, seja com oscilação crescente. No entanto, tem sido de extrema importância para a tecnologia de sistemas de controle o fato de existir um conjunto de condições sobre a resposta em frequência de malha aberta, que garante a estabilidade do sistema quando a malha é fechada.
- Tais condições foram originalmente estabelecidas pelo teorema de Nyquist, que foi um dos mais bem-sucedidos resultados teóricos da engenharia de controle do Século XX.
- Em 1932 Nyquist publicou o seu Critério de Estabilidade, resultado da aplicação magistral da Transformada de Laplace e do Princípio do Argumento de Cauchy.
- Era a teoria certa para transformar prática e intuição em engenharia, pois ela permitia garantir estabilidade a partir de medidas nos componentes, e assim projetar com segurança os controladores.

Princípio do argumento

Considere uma função racional $F(s)$ da variável complexa s dada por

$$F(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (7)$$

sendo z_1, z_2, \dots, z_n os zeros de $F(s)$, p_1, p_2, \dots, p_n os polos de $F(s)$ e k o ganho.

Princípio do Argumento de Cauchy

Suponha que um ponto do plano s percorra uma curva fechada γ neste plano, no sentido horário, e que o correspondente ponto $F(s)$ percorra outra curva Γ , também fechada, no plano $F(s)$. O número N de vezes que a curva Γ envolve a origem no plano $F(s)$, no sentido horário, é igual ao número de zeros N_z menos o número de polos N_p da função $F(s)$, que estão internos à curva γ , ou seja,

$$N = N_z - N_p. \quad (8)$$

Observações:

- Supõe-se que a curva γ não contém polos e nem zeros de $F(s)$ sobre ela;
- O número N negativo representa envolvimentos no sentido anti-horário.

Princípio do argumento

Na Figura 5.23 são apresentados exemplos de aplicação do Princípio do Argumento.

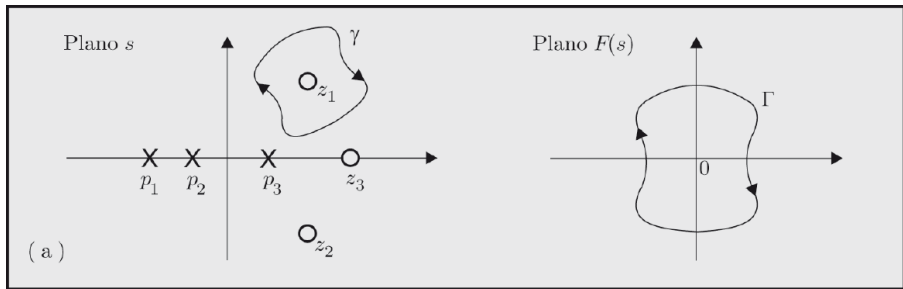


Figura 5.23 (a) Exemplo de aplicação do princípio do argumento.

Na Figura 5.23(a) a curva γ envolve o zero z_1 ($N_z = 1$) e nenhum polo ($N_p = 0$) no sentido horário. Logo, a curva Γ do plano $F(s)$ deve envolver a origem uma vez no sentido horário, pois $N = 1 - 0 = 1$.

Princípio do argumento

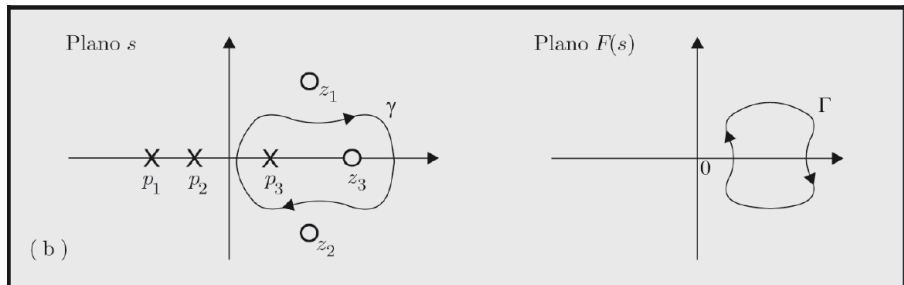


Figura 5.23 (b) Exemplo de aplicação do princípio do argumento.

Na Figura 5.23(b) a curva γ envolve o zero z_3 ($N_z = 1$) e o polo p_3 ($N_p = 1$) no sentido horário. Logo, a curva Γ do plano $F(s)$ não deve envolver a origem nenhuma vez, pois $N = 1 - 1 = 0$.

Princípio do argumento

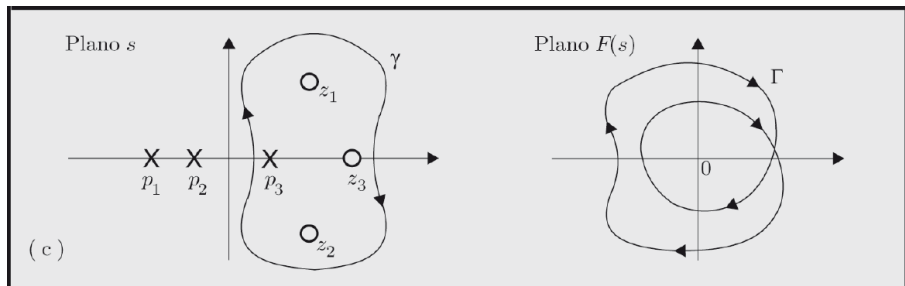


Figura 5.23 (c) Exemplo de aplicação do princípio do argumento.

Na Figura 5.23(c) a curva γ envolve os zeros z_1 , z_2 e z_3 ($N_z = 3$) e o polo p_3 ($N_p = 1$) no sentido horário. Logo, a curva Γ do plano $F(s)$ deve envolver a origem duas vezes no sentido horário, pois $N = 3 - 1 = 2$.

Princípio do argumento

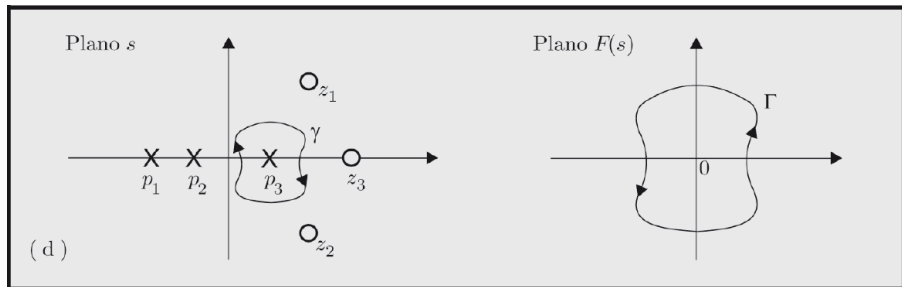


Figura 5.23 (d) Exemplo de aplicação do princípio do argumento.

Na Figura 5.23(d) a curva γ envolve o polo p_3 ($N_p = 1$) e nenhum zero ($N_z = 0$) no sentido horário. Logo, o número de envolvimentos da origem pela curva Γ no plano $F(s)$ é $N = 0 - 1 = -1$. Como o sinal de N é negativo, a curva Γ deve envolver a origem uma vez em sentido contrário, isto é, no sentido anti-horário.

Critério de estabilidade de Nyquist

Considere o sistema em malha fechada da Figura 5.24.

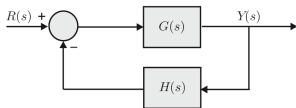


Figura 5.24 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (9)$$

Os polos de malha fechada são as raízes da equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0. \quad (10)$$

A função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ pode ser escrita como o quociente de dois polinômios, ou seja,

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (11)$$

Assim, a Equação (10) pode ser escrita como

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} = 0. \quad (12)$$

Denotando o semiplano direito do plano s por SPD, da Equação (12) definem-se:

- N_z igual ao número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no SPD, que é o **número de polos de malha fechada no SPD** (raízes de $D(s) + N(s)$ no SPD);
- N_p igual ao número de polos de $1 + G(s)H(s)$ no SPD, que é o **número de polos de malha aberta no SPD** (raízes de $D(s)$ no SPD).

Critério de estabilidade de Nyquist

Para que o sistema em malha fechada (9) seja BIBO estável é necessário que não tenha qualquer polo localizado no semiplano direito do plano s e também sobre o eixo imaginário ($N_z = 0$).

Esta condição pode ser verificada por meio do Princípio do Argumento:

Suponha uma curva fechada γ , denominada contorno de Nyquist, constituída do eixo imaginário do plano s e de uma semicircunferência de raio r arbitrariamente grande, que envolva inteiramente o semiplano direito de s , conforme é mostrado na Figura 5.25.

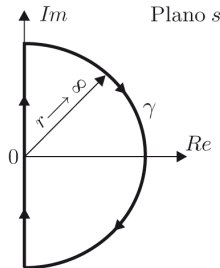


Figura 5.25 Contorno de Nyquist.

Seja Γ a curva representativa da imagem de $1 + G(s)H(s)$, calculada sobre a curva γ . Suponha que $1 + G(s)H(s)$ possua N_p polos no semiplano direito de s e que Γ envolva a origem N vezes no sentido horário. Pelo Princípio do Argumento, o número de zeros N_z envolvido por γ é

$$N_z = N + N_p. \quad (13)$$

Critério de estabilidade de Nyquist

Como N_z é o número de polos de malha fechada no semiplano direito do plano s , então o sistema (9) é estável se e somente se $N_z = 0$, ou seja,

$$N = -N_p, \quad (14)$$

que é o critério de estabilidade de Nyquist.

Geralmente, desenha-se a curva de $G(s)H(s)$ em vez de $1 + G(s)H(s)$. Nesse caso, o número de envoltimentos da origem do plano $1 + G(s)H(s)$ se transforma no número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ do plano $G(s)H(s)$.

Portanto, o critério de estabilidade de Nyquist pode ser enunciado assim:

Um sistema em malha fechada é estável se e somente se o número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ pela curva $G(s)H(s)$ no sentido anti-horário for igual ao número de polos de malha aberta com parte real positiva.

- Se $G(s)H(s)$ não possuir polos no semiplano direito de s ($N_p = 0$), então, para que o sistema em malha fechada seja estável, a curva de $G(s)H(s)$ não deve envolver o ponto $-1 + j0$.
- Se o número de polos de malha aberta com parte real positiva N_p for diferente de zero, então N é negativo. Com isso, o número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ deve ocorrer em sentido contrário, ou seja, no sentido anti-horário.
- O traçado do diagrama polar de Nyquist é a imagem do eixo $s = j\omega$ do contorno de Nyquist da Figura 5.25 para $-\infty < \omega < \infty$.

Exemplo 5.5

Considere um sistema com a função de transferência de malha aberta

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(s+1)(0,1s+1)}, \quad (15)$$

cujos polos em malha aberta são $s = -1$ e $s = -10$ (ou seja, o número de polos de malha aberta no SPD = 0, então, para ser estável em malha-fechada, o diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ não pode envolver $-1 + j0$).

Para calcular o diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$, considere que o módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ é dado por

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{0,01\omega^2 + 1}} \quad (16)$$

e a fase por

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan(0,1\omega). \quad (17)$$

Na tabela abaixo são apresentados os valores do módulo e da fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ para algumas frequências $0 \leq \omega < \infty$.

Tabela: Módulo e fase da função (15)

ω	0	0,5	1,3	3,2	10	100	∞
$ G(j\omega)H(j\omega) $	10	8,93	6,05	2,84	0,70	0,01	0
$\angle G(j\omega)H(j\omega)$	0°	$-29,43^\circ$	$-59,84^\circ$	$-90,39^\circ$	$-129,29^\circ$	$173,72^\circ$	-180°

Exemplo 5.5

O contorno de Nyquist é apresentado na Figura 5.26, e o correspondente diagrama polar de Nyquist da função (15) para $-\infty < \omega < \infty$ é apresentado na Figura 5.27. O traçado do diagrama polar da Figura 5.27 é a imagem do eixo $j\omega$ do contorno de Nyquist. Já a semicircunferência de raio infinito no semiplano direito de s é mapeada na origem do diagrama polar de $G(j\omega)H(j\omega)$.

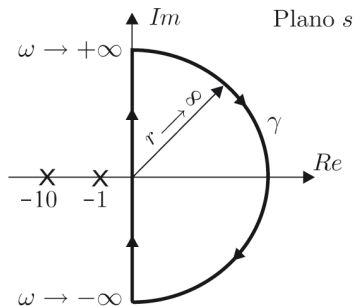


Figura 5.26 Contorno de Nyquist.

Exemplo 5.5

O sistema em malha aberta (15) não possui polos no semiplano direito ($N_p = 0$). Conforme é mostrado na Figura 5.27, o diagrama polar de Nyquist não envolve o ponto $-1 + j0$ ($N = 0$). Portanto, conclui-se que o sistema em malha fechada é estável.

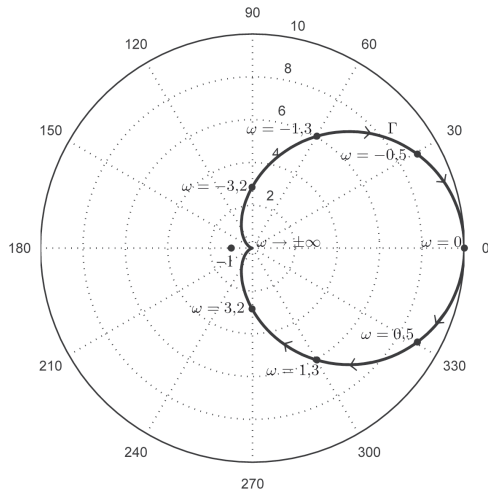


Figura 5.27 Diagrama polar de Nyquist da função (5.90).

Exemplo 5.6

Considere um sistema com a função de transferência de malha aberta

$$G(s)H(s) = \frac{2}{(0,5s - 1)(0,1s + 1)}, \quad (18)$$

cujos polos são $s = +2$ e $s = -10$ (ou seja, o número de polos de malha aberta no SPD = 1, então, para ser estável em malha-fechada, o diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ deve envolver $-1 + j0$ uma vez no sentido anti-horário).

O módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ é dado por

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{0,25\omega^2 + 1}\sqrt{0,01\omega^2 + 1}} \quad (19)$$

e a fase de $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-2}{(1-0,5j\omega)(1+0,1j\omega)}$ é dada por

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega)H(j\omega) &= -180^\circ - \arctan(-0,5\omega) - \arctan(0,1\omega) \\ &= -180^\circ + \arctan(0,5\omega) - \arctan(0,1\omega). \end{aligned} \quad (20)$$

Na tabela abaixo são apresentados os valores do módulo e da fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ para algumas frequências $0 \leq \omega < \infty$.

Tabela: Módulo e fase da função (18)

ω	0	1,6	3,2	12,2	∞
$ G(j\omega)H(j\omega) $	2	1,5	1,0	0,2	0
$\angle G(j\omega)H(j\omega)$	-180°	$-150,4^\circ$	$-139,8^\circ$	$-150,0^\circ$	-180°

Exemplo 5.6

O contorno de Nyquist é o mesmo da Figura 5.26 (repetida abaixo). O diagrama polar de Nyquist da função (18) para $-\infty < \omega < \infty$ é apresentado na Figura 5.28. O traçado do diagrama polar é a imagem do eixo $j\omega$ do contorno de Nyquist. Já a semicircunferência de raio infinito no semiplano direito de s do contorno de Nyquist, é mapeada num único ponto do diagrama polar, isto é, na origem.

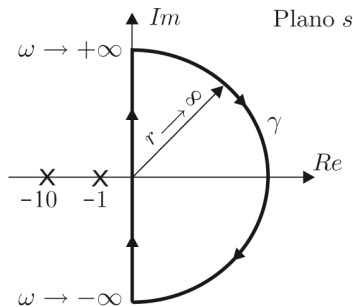


Figura 5.26 Contorno de Nyquist.

Exemplo 5.6

O sistema em malha aberta (18) possui um polo no semiplano direito ($N_p = 1$). Como o diagrama polar envolve o ponto $-1+j0$ uma vez no sentido anti-horário ($N = -N_p = -1$), então o sistema em malha fechada é estável.

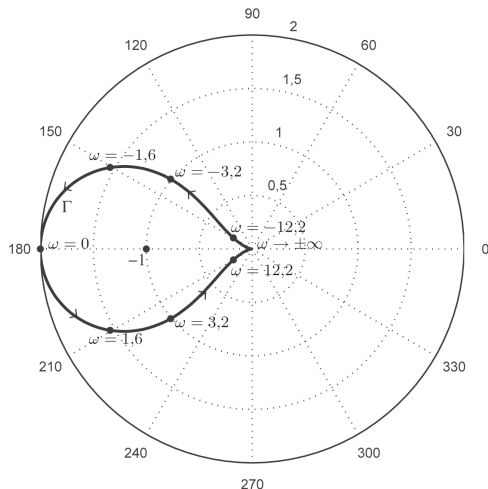


Figura 5.28 Diagrama polar de Nyquist da função (5.93).

Exercício

Considere um sistema que tem a função de transferência de malha aberta

$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)}. \quad (21)$$

a) Complete a tabela de módulo e fase de $G(s)H(s)$ para $s = j\omega$

ω	0	0,5	1	5	10	∞
$ G(j\omega)H(j\omega) $						
$\angle G(j\omega)H(j\omega)$						

b) Esboce o diagrama polar de Nyquist e analise a estabilidade do sistema respondendo: para qual faixa de valores de k o sistema é estável?

Solução

Nesse exercício, os polos em malha aberta são $s = +1$ e $s = -2$ (ou seja, o número de polos de malha aberta no SPD = 1, então, para ser estável em malha-fechada, o diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ deve envolver $-1 + j0$ uma vez no sentido anti-horário).

O módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ é dado por

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 4}} \quad (22)$$

e a fase de $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-k}{(1-j\omega)(2+j\omega)}$ para um $k > 0$ é dada por

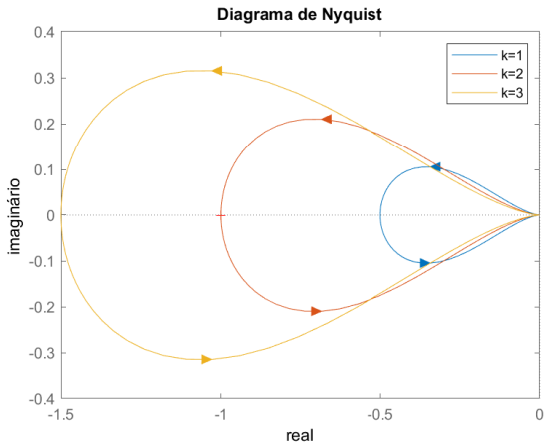
$$\begin{aligned} \angle G(j\omega)H(j\omega) &= -180^\circ - \arctan(-\omega) - \arctan(\omega/2) \\ &= -180^\circ + \arctan(\omega) - \arctan(0,5\omega). \end{aligned} \quad (23)$$

Na tabela abaixo são apresentados os valores do módulo e da fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ para algumas frequências $0 \leq \omega < \infty$.

ω	0	0,5	1	5	10	∞
$ G(j\omega)H(j\omega) $	0,5k	0,44k	0,32k	0,04k	0,01k	0k
$\angle G(j\omega)H(j\omega)$	-180°	$-167,5^\circ$	$-161,6^\circ$	$-169,5^\circ$	$-174,4^\circ$	-180°

Solução

Como o sistema em malha aberta possui um polo no semiplano direito e o diagrama polar envolve o ponto $-1 + j0$ uma vez no sentido anti-horário ($N = -1$) apenas quando $k > 2$, então o sistema em malha fechada é estável para $k > 2$.



ANEXO:

Exemplos de diagrama de Nyquist com polos sobre o eixo imaginário.

Exemplo 5.7

Considere um servomecanismo com função de transferência de malha aberta

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, \quad (24)$$

cujos polos são $s = 0$ e $s = -1/T$, com $k > 0$ e $T > 0$.

O Princípio do Argumento pressupõe que o contorno de Nyquist γ não passe sobre os polos de malha aberta. Então, assim como acontece nesse caso, se a função de transferência $G(s)H(s)$ possui polos sobre o eixo imaginário é preciso fazer um artifício para que a curva γ desvie desses polos. Isto é possível por meio de semicircunferências de raio ρ arbitrariamente pequeno no semiplano direito de s .

Exemplo 5.7

Como a função (24) possui um polo na origem, o contorno de Nyquist deve ter o aspecto da Figura 5.29(a). Para desenhar o diagrama polar de Nyquist é preciso analisar o percurso de Nyquist em cada trecho do seu contorno.

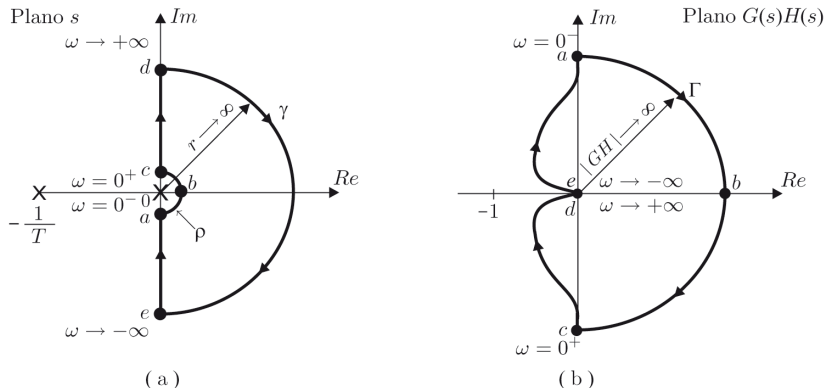


Figura 5.29 (a) Contorno de Nyquist. (b) Diagrama polar.

Exemplo 5.7

- trecho \overline{abc} : representa a pequena semicircunferência de raio ρ em torno do polo na origem no contorno de Nyquist, ou seja,

$$s = \rho e^{j\phi} \quad \text{para} \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ. \quad (25)$$

O mapeamento de $G(s)H(s)$ para $\rho \rightarrow 0$ é

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} G(s)H(s) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{s(Ts + 1)} \Big|_{s=\rho e^{j\phi}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{\rho e^{j\phi}(T\rho e^{j\phi} + 1)} \cong \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{\rho} e^{-j\phi}. \end{aligned} \quad (26)$$

Portanto, para $\rho \rightarrow 0$ o módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ tende a infinito. Como a fase ϕ varia de -90° a $+90^\circ$, a fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ varia de $+90^\circ$ a -90° no diagrama polar. O trecho \overline{abc} correspondente no diagrama polar é mostrado na Figura 5.29(b).

Exemplo 5.7

- trecho \overline{cd} : a frequência varia de $\omega = 0^+$ a $\omega = +\infty$. Substituindo s por $j\omega$ na Equação (24) o módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ é dado por

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \left| \frac{k}{j\omega(j\omega T + 1)} \right| = \frac{k}{\omega\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \quad (27)$$

e a fase é dada por

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctan(\omega T). \quad (28)$$

Assim,

- para $\omega = 0^+ \Rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)| \rightarrow \infty$ e $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ$ e
- para $\omega = +\infty \Rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)| = 0$ e $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ$.

Portanto, o trecho \overline{cd} do contorno de Nyquist é mapeado no trecho que vai do ponto c até a origem do diagrama polar.

Exemplo 5.7

- trecho \overline{de} : a frequência varia de $\omega = +\infty$ a $\omega = -\infty$. Neste caso, $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0$ e o mapeamento corresponde a um único ponto, que é a origem do diagrama polar.
- trecho \overline{ea} : a frequência varia de $\omega = -\infty$ a $\omega = 0^-$. Como $G(s)H(s)$ é uma função racional, o gráfico polar é simétrico com relação ao eixo real. Portanto, o trecho \overline{ea} do contorno de Nyquist é mapeado no trecho que vai da origem até o ponto a no diagrama polar.

Logo, como o sistema em malha aberta (24) não possui polos no semiplano direito ($N_p = 0$) e como o diagrama polar de Nyquist da Figura 5.29(b) não envolve o ponto $-1 + j0$ ($N = 0$), conclui-se que o sistema em malha fechada é estável.

Exemplo 5.8

Considere um sistema de posicionamento com um elemento de integração como, por exemplo, um motor elétrico que tem a função de transferência de malha aberta

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)^2}, \quad (29)$$

cujos polos são $s = 0$, $s = -1$ (polo duplo). Como a função (29) tem um polo na origem, o contorno de Nyquist tem o formato da Figura 5.30.

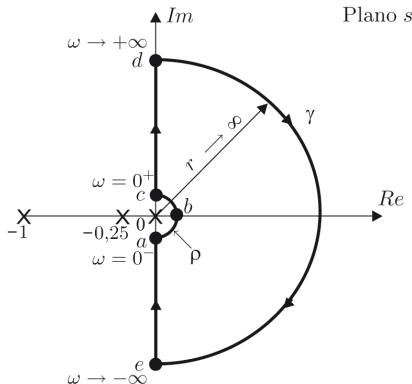


Figura 5.30 Contorno de Nyquist.

Exemplo 5.8

Para desenhar o diagrama polar de Nyquist é preciso analisar o percurso de Nyquist em cada trecho do seu contorno.

- trecho \overline{abc} : representa a pequena semicircunferência de raio ρ em torno do polo na origem no contorno de Nyquist, ou seja,

$$s = \rho e^{j\phi} \quad \text{para} \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ. \quad (30)$$

O mapeamento de $G(s)H(s)$ para $\rho \rightarrow 0$ é

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{\rho e^{j\phi}(\rho e^{j\phi} + 1)^2} \approx \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{\rho e^{j\phi}} \approx \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{\rho} e^{-j\phi}. \quad (31)$$

Portanto, para $\rho \rightarrow 0$ o módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ tende a infinito. Como a fase ϕ varia de -90° a $+90^\circ$, a fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ varia de $+90^\circ$ a -90° no diagrama polar. O trecho \overline{abc} correspondente no diagrama polar é mostrado na Figura 5.31.

Exemplo 5.8

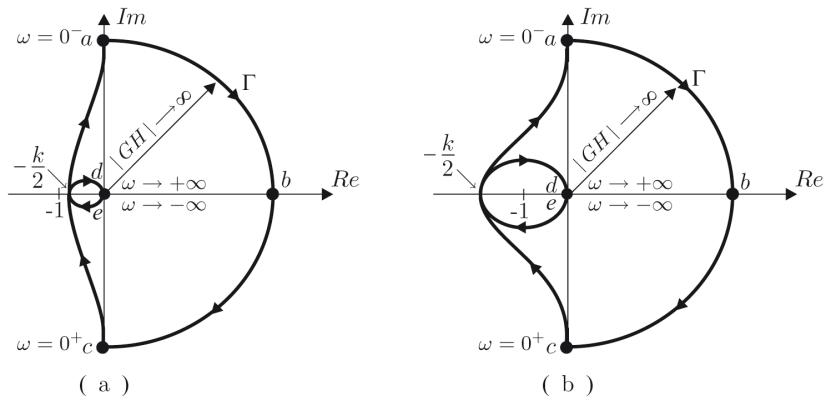


Figura 5.31 Diagrama polar de Nyquist. (a) Estável $k < 2$. (b) Instável $k > 2$.

Exemplo 5.8

- trecho \overline{cd} : a frequência varia de $\omega = 0^+$ a $\omega = +\infty$. Substituindo s por $j\omega$ na Equação (29), obtém-se

$$\begin{aligned}G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{k}{j\omega(j\omega + 1)^2} = \frac{k}{j\omega(-\omega^2 + j2\omega + 1)} = \frac{k}{-2\omega^2 + j(\omega - \omega^3)} \\ &= \frac{k}{-\omega(2\omega - j(1 - \omega^2))} = -\frac{k}{\omega} \left(\frac{2\omega + j(1 - \omega^2)}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \right).\end{aligned}\quad (32)$$

O módulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ é dado por

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{k}{\omega(\omega^2 + 1)} \quad (33)$$

e a fase é dada por

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan(\omega).\quad (34)$$

Assim,

- para $\omega = 0^+ \Rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)| \rightarrow \infty$ e $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ$ e
- para $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)| = 0$ e $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -270^\circ$.

Exemplo 5.8

Portanto, o trecho \overline{cd} do contorno de Nyquist é mapeado no trecho que vai do ponto c até a origem no diagrama polar. Para que a fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ seja -270° em $\omega \rightarrow +\infty$, o diagrama polar deve cruzar o eixo real. No ponto de cruzamento a parte imaginária de $G(j\omega)H(j\omega)$ é zero. Da Equação (32) verifica-se que isso ocorre para $j(1 - \omega^2) = 0$, ou seja, $\omega = 1$. Com isso, o ponto de cruzamento com o eixo real ocorre em

$$-\frac{k}{\omega} \left(\frac{2\omega}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \right) \Big|_{\omega=1} = -\frac{k}{2}. \quad (35)$$

Como o sistema em malha aberta (29) não possui polos no semiplano direito ($N_p = 0$), para que o sistema em malha fechada seja estável $N = -N_p = 0$, ou seja, o diagrama de Nyquist não deve envolver o ponto $-1 + j0$ (Figura 5.31(a)). Isso ocorre desde que

$$-\frac{k}{2} > -1 \Rightarrow k < 2. \quad (36)$$

Exemplo 5.8

Conforme a Figura 5.31(b), para $k > 2$ o diagrama de Nyquist envolve duas vezes ($N = 2$) no sentido horário o ponto $-1 + j0$. Com isso, o sistema em malha fechada terá 2 polos no semiplano direito ($N_z = 2$) e será instável. Para $k = 2$, o diagrama cruza o eixo real exatamente no ponto $-1 + j0$, sendo também instável.

- trecho \overline{de} : a frequência varia de $\omega = +\infty$ a $\omega = -\infty$. Neste caso $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0$ e o mapeamento corresponde a um único ponto, que é a origem do diagrama polar.
- trecho \overline{ea} : a frequência varia de $\omega = -\infty$ a $\omega = 0^-$. Como o diagrama polar deve ser simétrico com relação ao eixo real, o trecho \overline{ea} do contorno de Nyquist é mapeado no trecho que vai da origem até o ponto a no diagrama polar.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 5.**