

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 3.1: Revisão de Diagrama de Bode e
Identificação Experimental de Funções de transferência

Professora: Cecília de Freitas Morais

e-mails: cfmorais@unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Revisão de Análise no Domínio da Frequência

Considere o sistema linear e invariante no tempo da Figura 5.1 com função de transferência $G(s)$. Sendo $G(s)$ estável, sabe-se que para qualquer entrada $u(t)$ de amplitude finita a saída $y(t)$ também se mantém finita.

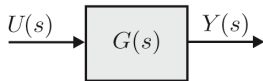


Figura 5.1 Sistema $G(s)$ estável, linear e invariante no tempo.

Suponha que $G(s)$ está sujeito a um sinal senoidal de entrada $u(t)$, de uma dada frequência ω e amplitude A , isto é,

$$u(t) = A \sin(\omega t), \quad (1)$$

cuja transformada de Laplace é

$$U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2)$$

A transformada de Laplace da saída é dada por

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Revisão de Análise no Domínio da Frequência

Supondo, por simplicidade, que $Y(s)$ possui apenas um par de polos complexos conjugados e n polos reais distintos $(-p_1, -p_2, \dots, -p_n)$, então $Y(s)$ pode ser expandida em frações parciais, ou seja,

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{a^*}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}, \quad (4)$$

sendo c_1, c_2, \dots, c_n constantes e a^* o complexo conjugado de a , que são calculados por

$$a = \left[(s + j\omega) \frac{G(s)A\omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=-j\omega} = \left[\frac{G(s)A\omega}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}, \quad (5)$$

$$a^* = \left[(s - j\omega) \frac{G(s)A\omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=j\omega} = \left[\frac{G(s)A\omega}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}. \quad (6)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação (4) é dada por

$$y(t) = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} + c_1 e^{-p_1 t} + c_2 e^{-p_2 t} + \dots + c_n e^{-p_n t}. \quad (7)$$

Revisão de Análise no Domínio da Frequência

Sendo $G(s)$ estável, todos os seus polos ($-p_1, -p_2, \dots, -p_n$) têm parte real negativa. Com isso, as exponenciais correspondentes a estes polos tendem a zero quando t tende a infinito, restando apenas os dois primeiros termos da Equação (7), ou seja,

$$y_{\infty}(t) = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j}e^{j\omega t}. \quad (8)$$

Sendo $|G(j\omega)|$ e $\phi(\omega)$, o módulo e a fase de $G(j\omega)$, respectivamente, então,

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}, \quad (9)$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}. \quad (10)$$

Da Equação (8) obtém-se

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \right) = A|G(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

O resultado da Equação (49) permite concluir que:

- a saída em regime permanente de um sistema estável, linear e invariante no tempo com entrada senoidal é também uma senoide com a mesma frequência da entrada;
- a amplitude da senoide de saída vale: $|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| = A|G(j\omega)|$;
- a defasagem entre entrada e saída é dada por: $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$;
- para obter a completa descrição dos efeitos da entrada senoidal no sistema $G(s)$ basta substituir s por $j\omega$ em $G(s)$ e calcular o módulo e a fase do número complexo resultante.

São estes resultados que justificam o nome de resposta em frequência para a função $G(j\omega)$.

Exemplo 5.1

Determine a saída $y_{\infty}(t)$ em regime permanente do sistema linear e invariante no tempo da Figura 5.2, quando é aplicada a entrada $u(t) = 2\text{sen}(3t)$.

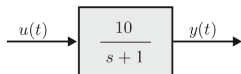


Figura 5.2 Sistema estável, linear e invariante no tempo.

Solução:

O sinal de entrada $u(t)$ é uma senoide com frequência $\omega = 3 \text{ rad/s}$ e amplitude $A = 2$. Logo, a saída $y_{\infty}(t)$ em regime permanente também é uma senoide com a mesma frequência da entrada. Da Equação (49) obtém-se

$$y_{\infty}(t) = 2|G(j3)|\text{sen}(3t + \phi(3)). \quad (12)$$

Substituindo s por $j\omega$ no sistema da Figura 5.2, obtém-se

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{10}{j\omega + 1} \right| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}. \quad (13)$$

Para $\omega = 3$

$$|G(j3)| = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 1}} \approx 3,16. \quad (14)$$

A fase de $G(j3)$ vale

$$\phi(3) = -\arctan(3) \approx -71,6^\circ. \quad (15)$$

Portanto, a saída $y_{\infty}(t)$ em regime permanente é dada por

$$y_{\infty} \approx 6,32\text{sen}(3t - 71,6^\circ). \quad (16)$$

Revisão de Diagramas de Bode

Revisão de Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode consistem em dois gráficos que, conjuntamente, representam a resposta em frequência:

- módulo de $G(j\omega)$ versus frequência ω , ambos em escala logarítmica;
- fase de $G(j\omega)$ versus frequência ω , esta última em escala logarítmica.

O módulo de $G(j\omega)$ pode ser também representado por $20 \log |G(j\omega)|$, ou seja, empregando a unidade denominada decibel (dB). As vantagens em desenhar os gráficos em escalas logarítmicas são as seguintes:

- permitem transformar produtos e divisões em somas e subtrações, respectivamente;
- fornecem boas aproximações por meio de segmentos de reta, sendo suas intersecções facilmente associadas aos polos e zeros da função de transferência;
- permitem abranger maiores faixas de valores das variáveis envolvidas, especialmente da frequência.

A seguir são apresentados os gráficos de Bode de diversos termos que podem aparecer numa função de transferência.

Revisão de Diagramas de Bode: Ganho constante

Neste caso particular a função de transferência é apenas um ganho k constante em qualquer frequência. O módulo de $G(j\omega)$ em decibéis é dada por

$$|G(j\omega)| = 20 \log |k| \quad (dB) \quad (17)$$

A fase de $G(j\omega)$ em graus é dada por

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ \text{ para } k > 0, \text{ e } \pm 180^\circ \text{ para } k < 0. \quad (18)$$

Na Figura 5.3 são apresentados os gráficos de Bode do ganho constante.

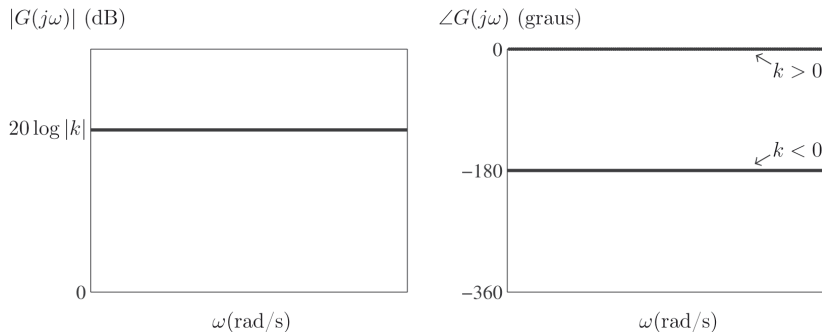


Figura 5.3 Gráficos de Bode do ganho constante.

Revisão de Diagramas de Bode: Polo na origem

Quando a função de transferência possui um polo na origem, ou seja, $G(s) = 1/s$, o módulo de $G(j\omega)$ em decibéis é dado por

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \omega^{-1} = -20 \log \omega \text{ (dB)}. \quad (19)$$

Definindo $x(\omega) = \log \omega$, a Equação (19) pode ser escrita na forma linear $|G(j\omega)| = -20x(\omega)$. Este resultado mostra que o gráfico do $|G(j\omega)|$, em escala logarítmica, é uma reta com inclinação de -20dB/década , ou seja, na medida em que a frequência aumenta de 10 vezes o ganho diminui de 20 decibéis. Note que esta reta passa por 0 (dB) na frequência $\omega = 1(\text{rad/s})$.

Alguns valores do módulo de $G(j\omega)$ em decibéis são apresentados na tabela abaixo.

$\omega(\text{rad/s})$	$ G(j\omega) $ (dB)
0,1	20
1	0
10	-20
100	-40

A fase de um polo na origem vale $\angle G(j\omega) = -90^\circ$ para qualquer frequência ω . Na Figura 5.4 são apresentados os gráficos de Bode de um polo na origem.

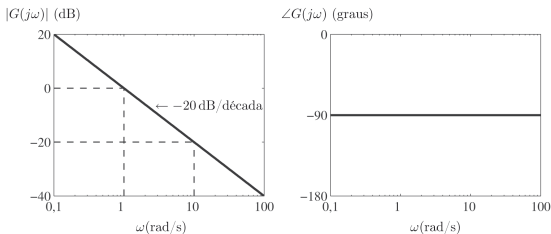


Figura 5.4 Gráficos de Bode de um polo na origem.

Revisão de Diagramas de Bode: Zero na origem

Quando a função de transferência possui um zero na origem, tem-se que

$$|G(j\omega)| = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ (dB)}. \quad (20)$$

O gráfico do módulo de um zero na origem é uma reta com inclinação de $+20\text{dB/década}$, que passa por 0 dB na frequência $\omega = 1(\text{rad/s})$. Já a fase vale $\angle G(j\omega) = 90^\circ$ para qualquer frequência ω . Na Figura 5.5 são apresentados os gráficos de Bode de um zero na origem.

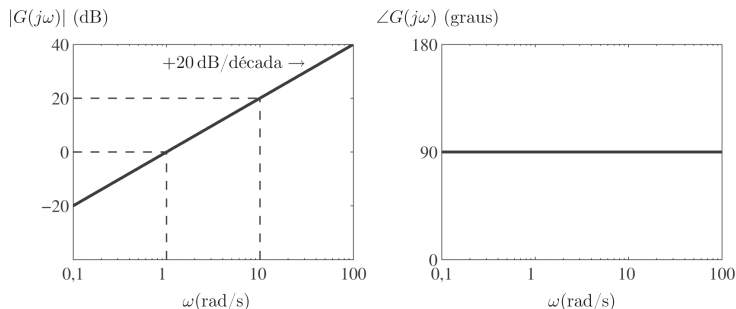


Figura 5.5 Gráficos de Bode de um zero na origem.

Note que os gráficos de Bode de um zero na origem são os mesmos do polo na origem com os sinais do módulo e da fase invertidos.

Revisão de Diagramas de Bode: Polo real fora da origem

Considere a função de transferência com constante de tempo T (frequência de corte $\omega_c = 1/T$) de um sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}. \quad (21)$$

O módulo de $G(j\omega)$ em decibéis é dada por

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = 20 \log |j\omega T + 1|^{-1} = -20 \log |j\omega T + 1| \text{ (dB)} \quad (22)$$

e a fase de $G(j\omega)$ vale

$$\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega T). \quad (23)$$

Para $\omega T \ll 1$ ($\omega \ll \omega_c$), ou seja, em baixas frequências tem-se que

$$|G(j\omega)| \approx -20 \log |1| \approx 0 \text{ (dB)} \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) \approx 0^\circ.$$

Para $\omega T \gg 1$ ($\omega \gg \omega_c$), ou seja, em altas frequências tem-se que

$$|G(j\omega)| \approx -20 \log |j\omega T| \text{ (dB)} \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) \approx -90^\circ.$$

Neste último caso o módulo representa uma reta com inclinação de -20dB/década . Por fim, na frequência do polo, ou seja, para $\omega T = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{T}$ ($\omega = \omega_c$), tem-se que

$$|G(j\omega)| = -20 \log |j + 1| = -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{ (dB)} \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = -\arctan(1) = -45^\circ.$$

Revisão de Diagramas de Bode: Polo real fora da origem

Na tabela abaixo estão resumidos esses resultados. Desse modo, dividindo o eixo das frequências em duas regiões (frequências menores e maiores que a frequência do polo em $\omega = 1/T = \omega_c$) consegue-se desenhar os gráficos de Bode, conforme é apresentado na Figura 5.6.

	$\omega T \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \omega_c$	$\omega T = 1 \Rightarrow \omega = \omega_c$	$\omega T \gg 1 \Rightarrow \omega \gg \omega_c$
$ G(j\omega) $	0 dB	-3 dB	Reta com inclinação de $\frac{-20 \text{ dB}}{\text{década}}$
$\angle G(j\omega)$	0°	-45°	-90°

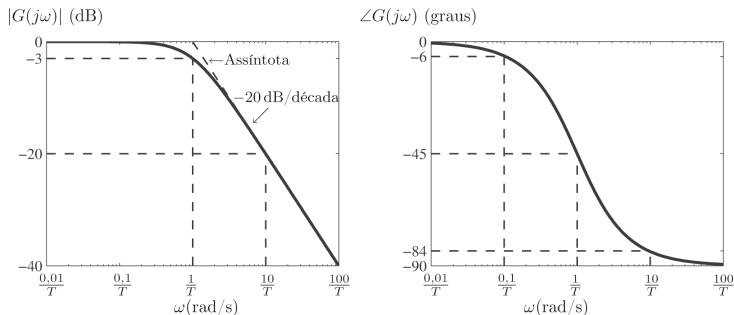


Figura 5.6 Gráficos de Bode de um polo real em $s = -\frac{1}{T}$.

Revisão de Diagramas de Bode: Zero real fora da origem

Considere o caso em que a função de transferência¹ possui um termo do tipo

$$G(s) = (Ts + 1) = \frac{s + \omega_c}{\omega_c}$$

em seu numerador, isto é, um zero em $s = -1/T = -\omega_c$. Supondo $G(j\omega) = j\omega T + 1$, o módulo de $G(j\omega)$ em decibéis é dado por

$$|G(j\omega)| = 20 \log |j\omega T + 1| \text{ (dB)} \quad (24)$$

e a fase de $G(j\omega)$ vale

$$\angle G(j\omega) = \arctan(\omega T). \quad (25)$$

Para desenhar os gráficos de Bode de um zero real fora da origem pode-se realizar análise semelhante ao caso anterior do polo real, ou seja, basta dividir os gráficos em duas regiões, considerando as baixas frequências em que $\omega T \ll 1$ ($\omega \ll \omega_c$) e as altas frequências em que $\omega T \gg 1$ ($\omega \gg \omega_c$). Estes resultados estão resumidos na tabela abaixo.

	$\omega T \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \omega_c$	$\omega T = 1 \Rightarrow \omega = \omega_c$	$\omega T \gg 1 \Rightarrow \omega \gg \omega_c$
$ G(j\omega) $	0 dB	3 dB	Reta com inclinação de $\frac{+20 \text{ dB}}{\text{década}}$
$\angle G(j\omega)$	0°	45°	90°

¹Funções de transferência com apenas um zero no numerador não são usualmente implementadas, devido aos elevados ganhos em altas frequências que amplificam ruídos e acarretam saturação dos dispositivos.

Revisão de Diagramas de Bode: Zero real fora da origem

Os gráficos de Bode de um zero real em $s = -\frac{1}{T} = -\omega_c$ são apresentados na Figura 5.7. Note que estes gráficos são os mesmos do polo real, com a diferença de que os sinais do módulo e da fase devem ser invertidos.

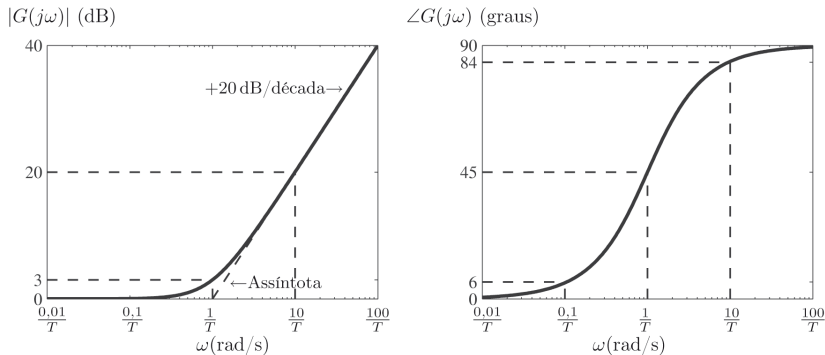


Figura 5.7 Gráficos de Bode de um zero real em $s = -\frac{1}{T}$.

Conforme se pode verificar na Figura 5.7, para um gráfico de módulo obtido experimentalmente a intersecção da assíntota com o eixo de 0 dB permite localizar o zero real da função de transferência.

Revisão de Diagramas de Bode: Polos complexos conjugados

Considere a função de transferência de um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (26)$$

Substituindo s por $j\omega$, o módulo de $G(j\omega)$ em decibéis é dado por

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + 1} \right| = -20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right| \text{ dB}. \quad (27)$$

Em baixas frequências, ou seja, para $\omega \ll \omega_n$, tem-se que

$$|G(j\omega)| \approx -20 \log |1| \approx 0 \text{ dB}. \quad (28)$$

Em altas frequências, ou seja, para $\omega \gg \omega_n$, tem-se que

$$|G(j\omega)| \approx -20 \log \left| -\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| \approx -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \text{ dB}, \quad (29)$$

isto é, em altas frequências o gráfico do módulo de $G(j\omega)$ é uma reta com inclinação de -40 dB por década que cruza o eixo da frequência no ponto $\omega = \omega_n$.

Revisão de Diagramas de Bode: Polos complexos conjugados

Na frequência $\omega = \omega_n$

$$|G(j\omega)| = -20 \log |j2\xi| = -20 \log(2\xi) \text{ dB} \quad (30)$$

Substituindo s por $j\omega$ na Equação (26), a fase $G(j\omega)$ pode ser calculada por

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right). \quad (31)$$

Em baixas frequências, ou seja, para $\omega \ll \omega_n$, tem-se que

$$\angle G(j\omega) \approx 0^\circ. \quad (32)$$

Em altas frequências, ou seja, para $\omega \gg \omega_n$, tem-se que

$$\angle G(j\omega) \approx -180^\circ \quad (33)$$

e na frequência $\omega = \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ. \quad (34)$$

Estes resultados estão resumidos na tabela abaixo.

	$\omega \ll \omega_n$	$\omega = \omega_n$	$\omega \gg \omega_n$
$ G(j\omega) $	0 dB	$-20 \log(2\xi)$ dB	Reta com inclinação de $\frac{-40 \text{ dB}}{\text{década}}$
$\angle G(j\omega)$	0°	-90°	-180°

Revisão de Diagramas de Bode: Polos complexos conjugados

Na Figura 5.8 é apresentado o gráfico do módulo de $G(j\omega)$ em dB para $\xi = 1$. Em altas frequências o gráfico do módulo é uma reta com inclinação de -40dB/década . Note que para um gráfico de módulo obtido experimentalmente a intersecção da assíntota com o eixo de 0 dB permite identificar a frequência natural ω_n do sistema.

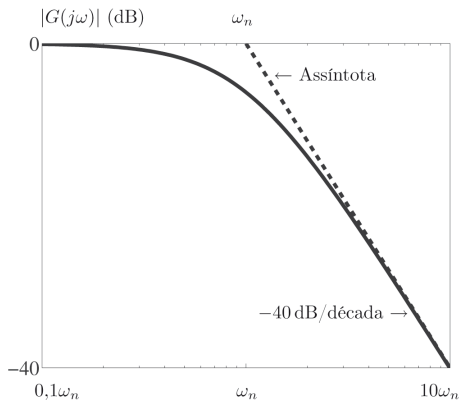


Figura 5.8 Gráfico de $|G(j\omega)|$ (dB) para $\xi = 1$.

Revisão de Diagramas de Bode: Polos complexos conjugados

Obviamente, o gráfico exato do $|G(j\omega)|$ depende do coeficiente de amortecimento ξ . Nas proximidades da frequência ω_n pode existir um pico de ressonância, que é tanto maior quanto menor é o amortecimento ξ do sistema. Na Figura 5.9 são apresentados os gráficos de Bode de polos complexos conjugados. A frequência de ressonância ω_r pode ser determinada calculando-se o ponto máximo da função

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad (35)$$

que ocorre em

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (36)$$

O valor do ganho na frequência de ressonância ω_r é dado por

$$M_r = |G(\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (37)$$

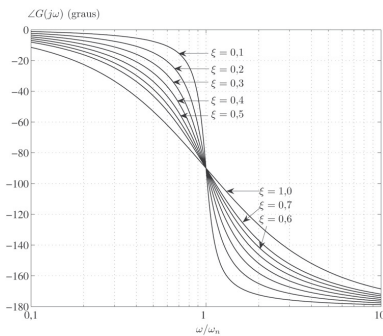
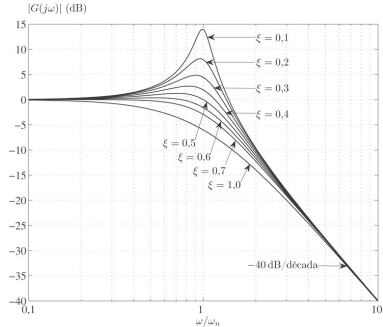


Figura 5.9 Gráficos de Bode de polos complexos conjugados.

Na Figura 5.10 é apresentado o gráfico do pico de ressonância M_r (dB) em função do coeficiente de amortecimento ξ . Na prática, normalmente as respostas transitórias aceitáveis têm coeficiente de amortecimento $0,4 \leq \xi \leq 0,7$, que corresponde a um pico de ressonância $0 \text{ dB} \leq M_r \leq 3 \text{ dB}$.

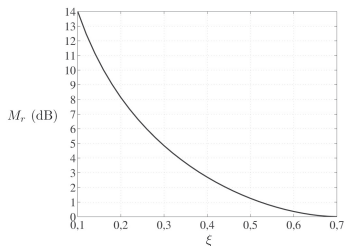


Figura 5.10 Pico de ressonância M_r (dB) em função de ξ .

Revisão de Diagramas de Bode: Zeros complexos conjugados

Neste caso a função de transferência² deve possuir termos do tipo $\frac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$, $0 < \xi < 1$. Supondo

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}, \quad (38)$$

o módulo de $G(j\omega)$ em decibéis é dado por

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right| \text{ dB}, \quad (39)$$

e a fase de $G(j\omega)$ vale

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{\frac{2\xi\omega_n}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right). \quad (40)$$

²Funções de transferência em que o grau do numerador é maior que o do denominador não são usualmente implementadas.

Revisão de Diagramas de Bode: Zeros complexos conjugados

Para desenhar os gráficos de Bode pode-se realizar análise semelhante ao caso anterior dos polos complexos conjugados, ou seja, basta dividir os gráficos em duas regiões, considerando as baixas frequências em que $\omega \ll \omega_n$ e as altas frequências em que $\omega \gg \omega_n$. Estes resultados estão resumidos na tabela abaixo. Note que os gráficos dos zeros complexos conjugados são os mesmos dos polos complexos conjugados, com a diferença de que os sinais do módulo e da fase devem ser invertidos.

	$\omega \ll \omega_n$	$\omega = \omega_n$	$\omega \gg \omega_n$
$ G(j\omega) $	0 dB	$20 \log(2\xi)$ dB	Reta com inclinação de $\frac{+40 \text{ dB}}{\text{década}}$
$\angle G(j\omega)$	0°	90°	180°

Na Figura 5.11 são apresentados os gráficos de Bode de zeros complexos conjugados.

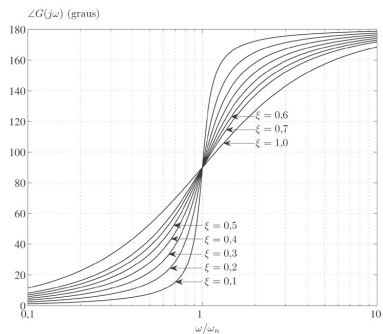
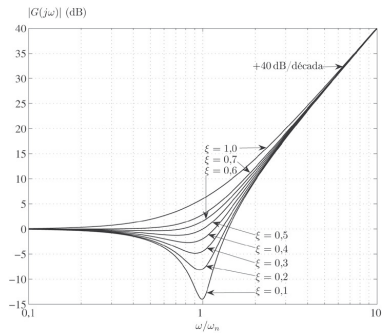


Figura 5.11 Gráficos de Bode de zeros complexos conjugados.

Revisão de Diagramas de Bode: Sistemas gerais

Para construir os gráficos de Bode de um sistema contendo diversos fatores (polos e zeros), basta primeiramente desenhar os gráficos para cada fator e depois somar as ordenadas das curvas de cada fator para obter os gráficos do sistema completo:

$$G(s) = s^m \frac{1}{s^n} \frac{\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}} \frac{s + \omega_{c2}}{\omega_{c2}} \frac{\omega_{n1}}{s^2 + 2\xi_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2} \frac{s^2 + 2\xi_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2}{\omega_{n2}}$$

De fato, considere o sistema representado por

$$G(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^L} \frac{\prod_{a=1}^m (j\omega T_a + 1)}{\prod_{b=1}^n (j\omega T_b + 1)}, \quad (41)$$

sendo k , ω , T_a e T_b números reais.

Escrevendo $G(j\omega)$ em coordenadas polares, obtém-se

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{|k| e^{j\angle k}}{|j\omega|^L e^{jL\angle j\omega}} \frac{\prod_{a=1}^m |j\omega T_a + 1| e^{j\angle(j\omega T_a + 1)}}{\prod_{b=1}^n |j\omega T_b + 1| e^{j\angle(j\omega T_b + 1)}}. \quad (42)$$

Logo,

$$|G(j\omega)| = \frac{|k|}{|j\omega|^L} \frac{\prod_{a=1}^m |j\omega T_a + 1|}{\prod_{b=1}^n |j\omega T_b + 1|}. \quad (43)$$

Diagramas de Bode: Sistemas gerais

Aplicando o logaritmo na Equação (43), obtém-se

$$\log |G(j\omega)| = \log |k| + \sum_{a=1}^m \log |j\omega T_a + 1| - L \log |j\omega| - \sum_{b=1}^n \log |j\omega T_b + 1|. \quad (44)$$

Em decibéis, a Equação (44) resulta como

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |k| + \sum_{a=1}^m 20 \log |j\omega T_a + 1| - L 20 \log |j\omega| - \sum_{b=1}^n 20 \log |j\omega T_b + 1|, \quad (45)$$

ou seja, para obter o gráfico do módulo de $G(j\omega)$ em decibéis basta realizar a soma algébrica dos gráficos dos módulos de cada fator de $G(j\omega)$.

Da Equação (42) tem-se que a fase de $G(j\omega)$ é a soma das fases de cada fator, ou seja,

$$\angle G(j\omega) = \angle k + \sum_{a=1}^m \angle(j\omega T_a + 1) - L \angle(j\omega) - \sum_{b=1}^n \angle(j\omega T_b + 1). \quad (46)$$

Exemplo 5.2

Deseja-se obter os gráficos de Bode do sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s^2 + 10s}. \quad (47)$$

A função (47) também pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(0,1s+1)} \quad \text{ou} \quad G(s) = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s+1}{1} \cdot \frac{10}{s+10}. \quad (48)$$

Para obter os gráficos de Bode da função (48) basta desenhar os gráficos de cada fator separadamente (ganho constante $k = 10$, zero real em $s = -1$, polo na origem e polo real em $s = -10$) e depois somar as ordenadas de cada curva. Os gráficos de Bode da função (48) estão apresentados na Figura 5.12. Observe que devido à presença do integrador (polo na origem), o gráfico do módulo em baixas frequências é uma reta com inclinação -20 dB/década.

Gráficos aproximados da função (48) podem ser obtidos somando-se as aproximações assintóticas dos gráficos dos fatores. Esta aproximação é boa, exceto nas frequências correspondentes aos polos e zeros.

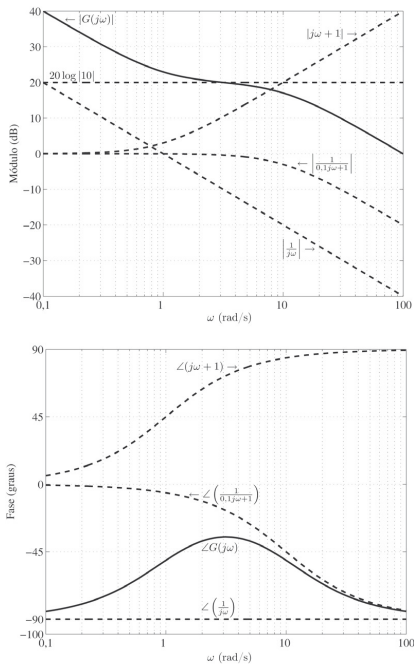


Figura 5.12 Gráficos de Bode da função (5.48).

Exercício

Utilize a seguinte tabela

Tabela 1 – Assintotas dos diagramas de Bode de modulo e fase para diferentes funções de transferência

Tipo	Função de transferência	$ G(j\omega) $		$\angle G(j\omega)$			
				$k > 0$	$k < 0$		
Ganho constante	$G(s) = k$	$20 \log(k)$		0°	180°		
Zero de ordem m na origem	$G(s) = s^m$	$m(20 \log(\omega))$		$+90^\circ(m)$			
Polo de ordem n na origem	$G(s) = \frac{1}{s^n}$	$n(-20 \log(\omega))$		$-90^\circ(n)$			
Polo fora da origem	$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \omega_c = \frac{1}{T}$	$\omega \leq \omega_c$	$\omega > \omega_c$	$\omega \leq \frac{\omega_c}{10}$	$\omega = \omega_c$	$\omega \geq 10\omega_c$	
		0	-20dB/déc	0°	-45°	-90°	
Zero fora da origem	$G(s) = Ts + 1, \omega_c = \frac{1}{T}$	$\omega \leq \omega_c$	$\omega > \omega_c$	$\omega \leq \frac{\omega_c}{10}$	$\omega = \omega_c$	$\omega \geq 10\omega_c$	
		0	+20dB/déc	0°	$+45^\circ$	$+90^\circ$	
Polos complexo conjugados	$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega \leq \omega_n$	$\omega > \omega_n$	$\omega \leq \frac{\omega_n}{10}$	$\omega = \omega_n$	$\omega \geq 10\omega_n$	
		0	-40dB/déc	0°	-90°	-180°	
Zeros complexo conjugados	$G(s) = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$	$\omega \leq \omega_n$	$\omega > \omega_n$	$\omega \leq \frac{\omega_n}{10}$	$\omega = \omega_n$	$\omega \geq 10\omega_n$	
		0	+40dB/déc	0°	$+90^\circ$	$+180^\circ$	

para desenhar o diagrama de Bode correspondente à seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{100(s + 10)}{s^2 + 100s}$$

Revisão de Identificação experimental de funções de transferência

Basicamente, a função de transferência que representa a dinâmica do funcionamento de um processo pode ser obtida de três maneiras:

- escrevendo as equações diferenciais ou algébricas e medindo diretamente os parâmetros (massas, atritos, resistências, indutâncias, ganhos de amplificadores, etc.);
- por meio da resposta ao degrau, para sistemas de dinâmica simples, medindo constante de tempo, valor estacionário, pico de ressonância, tempo de subida, instante de pico ou tempo de acomodação;
- através da resposta em frequência e identificação gráfica de cada um dos fatores da função de transferência.

Medida da resposta em frequência

Aplicando um sinal senoidal na entrada de um sistema estável, linear e invariante no tempo, após o estabelecimento do regime permanente, o sinal de saída também será senoidal com a mesma frequência da entrada, conforme mostrado na seguinte equação:

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi(\omega)). \quad (49)$$

Para a medida da resposta em frequência esta operação deve ser repetida em um número suficiente de frequências para caracterizar a resposta. Conforme mostrado na Figura 5.13, para cada frequência ω devem ser medidas:

- as amplitudes das senoides de entrada $|U(j\omega)|$ e de saída $|Y(j\omega)|$;
- a defasagem $\phi(\omega)$ entre entrada e saída.

O módulo da função de transferência é dado por

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} \quad (50)$$

e a fase por

$$\angle G(j\omega) = \phi(\omega) = \angle Y(j\omega) - \angle U(j\omega). \quad (51)$$

Medida da resposta em frequência

Para medir a defasagem $\phi(\omega)$ é necessário observar os sinais de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ simultaneamente, conforme exemplificado na Figura 5.13.

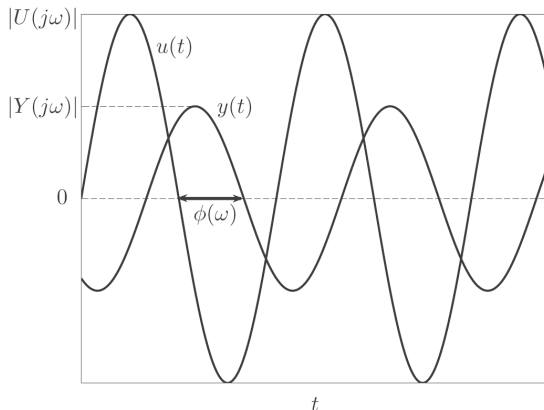


Figura 5.13 Observação simultânea dos sinais de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.

Medida da resposta em frequência

O módulo e a fase de $G(j\omega)$ também podem ser medidos através da figura de Lissajous. Conforme representado na Figura 5.14, o gráfico resultante é uma elipse formada pelos pontos $(u(t), y(t))$, ou seja, com $u(t)$ no eixo das abscissas e $y(t)$ no eixo das ordenadas.

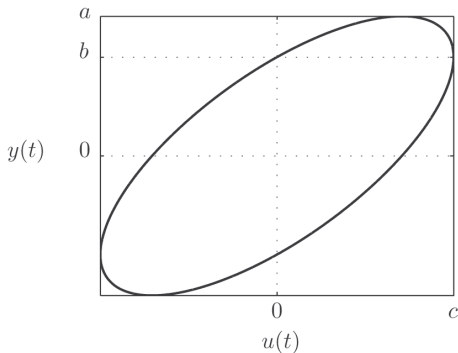


Figura 5.14 Figura de Lissajous.

Medida da resposta em frequência

Da Figura 5.14 tem-se que

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = \frac{a}{c} \quad (52)$$

e prova-se que

$$\angle G(j\omega) = \phi(\omega) = \arcsen\left(\frac{b}{a}\right). \quad (53)$$

Após serem realizadas as medidas do módulo e da defasagem em um número suficiente de frequências, os pontos medidos devem ser colocados em gráficos de Bode, traçando-se segmentos de reta ou aproximações assintóticas que passem por estes pontos. Polos e zeros da função de transferência são localizados nas frequências em que ocorrem mudanças de inclinação dessas assíntotas.

Medida da resposta em frequência

- No caso do módulo as inclinações dos segmentos de reta devem ser números múltiplos de $\pm 20\text{dB/década}$.
- Se, por exemplo, numa certa frequência $\omega_c = 1/T$ a inclinação de um segmento de reta muda de -20dB/década para -40dB/década , isso significa que nesta frequência há um polo real, ou seja, um termo do tipo $\frac{1}{Ts + 1}$ ou $\frac{\omega_c}{s + \omega_c}$.
- Caso contrário, se nesta mesma frequência $\omega_c = 1/T$ a inclinação do segmento de reta muda de -20dB/década para uma reta paralela ao eixo da frequência (0dB/década), isso significa que há um zero real, ou seja, um termo do tipo $Ts + 1$ ou $\frac{s + \omega_c}{\omega_c}$.
- Se, por outro lado, na frequência $\omega = \omega_n$ a inclinação do segmento de reta muda de -20dB/década para -60dB/década , com a existência de um pico de ressonância, isso significa que há um par de polos complexos conjugados, acrescentando um termo do tipo $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ na função de transferência.

Medida da resposta em frequência

- Se em baixas frequências, isto é, para $\omega \rightarrow 0$, o segmento de reta tem uma inclinação de $-20L\text{dB/década}$, isso significa que há L polos na origem ($L = 1, 2, 3, \dots$).
- Caso contrário, se em baixas frequências a inclinação é de $+20L\text{dB/década}$ isso significa que há L zeros na origem.
- Caso o segmento de reta em baixas frequências é horizontal, então a função de transferência não possui polos e nem zeros na origem.
- Quanto ao ganho constante k da função de transferência, este pode ser medido diretamente a partir do valor do módulo em baixas frequências.

Uma vez obtida a função de transferência a partir das aproximações assintóticas da curva de módulo, convém calcular as defasagens e comparar com as defasagens medidas. Este procedimento permite realizar uma verificação das aproximações adotadas, além de permitir ajustes nas frequências dos polos e zeros.

Exemplo 5.3

Desejando-se identificar a função de transferência $G(s)$ de um processo estável, linear e invariante no tempo, aplicaram-se sinais senoidais com amplitude $|U(j\omega)|$ na sua entrada e mediram-se as correspondentes amplitudes $|Y(j\omega)|$ dos sinais de saída. Para cada frequência ω calculou-se $|G(j\omega)| = |Y(j\omega)|/|U(j\omega)|$, cujos pontos estão representados no gráfico da Figura 5.15. A seguir traçaram-se assíntotas (retas tracejadas tangenciando o gráfico original) de modo a obter a frequência dos polos da função de transferência.

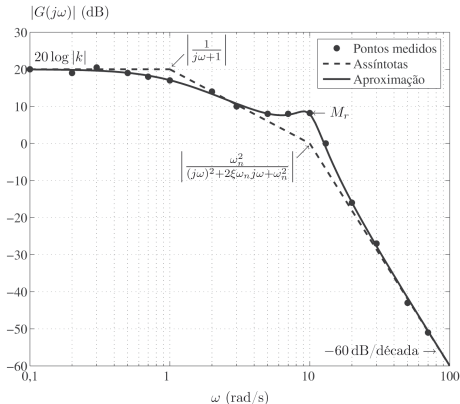


Figura 5.15 Gráfico de $|G(j\omega)|$ (dB).

Exemplo 5.3

Analisando-se o gráfico da Figura 5.15 verifica-se que próximo da frequência $\omega \approx 0,1$ o módulo de $G(j\omega)$ vale 20dB. Com isso o ganho constante k da função de transferência vale

$$20 \log |k| = 20 \Rightarrow k = 10. \quad (54)$$

Entre as frequências $\omega = 0,1$ e $\omega = 1$ há uma assíntota horizontal paralela ao eixo da frequência. Com isso conclui-se que o sistema não possui polos ou zeros na origem. Esta assíntota horizontal muda de inclinação a partir da frequência $\omega = 1$, passando a ter uma inclinação de $-20\text{dB}/\text{década}$ até a frequência $\omega = 10$. Com essa mudança de inclinação ocorreu na frequência $\omega = 1$, conclui-se que o sistema possui um polo real em $s = -1$, ou seja, a função de transferência possui um fator do tipo

$$\frac{1}{Ts + 1} = \frac{1}{s + 1}. \quad (55)$$

Exemplo 5.3

Entre as frequências $\omega = 10$ e $\omega = 100$ há uma assíntota com inclinação de -60dB/década , e nota-se também a presença de um pico de ressonância nas proximidades da frequência $\omega_r \approx 10$. Com isso conclui-se que o sistema possui um par de polos complexos conjugados. Note que a assíntota com inclinação de -60dB/década é o resultado da soma das assíntotas do polo real (-20dB/década) com a assíntota dos polos complexos conjugados (-40dB/década).

Do gráfico da Figura 5.15 verifica-se que o pico da ressonância ocorre na frequência $\omega_r \approx 10(\text{rad/s})$ e o ganho vale $M_r \approx 8\text{dB}$. Da Equação

$$M_r = |G(\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (56)$$

tem-se que

$$M_r(\text{dB}) \approx 8 = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right) \Rightarrow \xi \approx 0,2 \quad (57)$$

e da Equação

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (58)$$

tem-se que

$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}} \Rightarrow \omega_n \approx 10(\text{rad/s}). \quad (59)$$

Exemplo 5.3

Assim, a função de transferência também possui um fator do tipo

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{100}{s^2 + 4s + 100}. \quad (60)$$

De (54), (55), (60) conclui-se que a função de transferência do processo é dada por

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{(Ts + 1)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1000}{(s + 1)(s^2 + 4s + 100)}. \quad (61)$$

Sistemas de fase mínima e de fase não mínima

Sistemas de fase mínima e de fase não mínima

Os sistemas estáveis³ que têm função de transferência com:

- todos os seus zeros no semiplano esquerdo do plano s são chamados de sistemas de **fase mínima**,
- e os que têm um ou mais zeros no semiplano direito são ditos de **fase não mínima**.

Justificam-se tais denominações considerando os seguintes exemplos de sistemas estáveis:

$$G_1(s) = \frac{1 + s/z}{1 + s/p} \quad (62)$$

$$G_2(s) = \frac{1 - s/z}{1 + s/p} \quad (63)$$

sendo $z > 0$ e $p > 0$.

³São os sistemas que têm todos os seus polos localizados no semiplano esquerdo aberto do plano s .

Sistemas de fase mínima e de fase não mínima

Pela definição anterior, o sistema $G_1(s)$ é de fase mínima, pois o seu zero $s = -z$ está localizado no semiplano esquerdo do plano s , enquanto $G_2(s)$ é de fase não mínima, pois o seu zero $s = z$ está localizado no semiplano direito do plano s .

Note que ambas as funções $G_1(j\omega)$ e $G_2(j\omega)$ possuem o mesmo módulo,

$$|G_1(j\omega)| = \left| \frac{1 + (j\omega)/z}{1 + (j\omega)/p} \right| = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega/z)^2}}{\sqrt{1^2 + (\omega/p)^2}} = \left| \frac{1 - (j\omega)/z}{1 + (j\omega)/p} \right| = |G_2(j\omega)|. \quad (64)$$

Porém, as fases de $G_1(j\omega)$ e $G_2(j\omega)$ são diferentes:

$$\angle G_1(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{z}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right) \quad (65)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega}{z}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right). \quad (66)$$

Das Equações (65) e (66) tem-se que em baixas frequências

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_1(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_2(j\omega) = 0, \quad (67)$$

mas em altas frequências

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_1(j\omega) = 0 \neq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_2(j\omega) = -180^\circ. \quad (68)$$

Sistemas de fase mínima e de fase não mínima

Portanto, duas funções de transferência idênticas em módulo podem ter diferenças significativas de fase. Na Figura 5.16 são apresentados os gráficos da fase de $G_1(j\omega)$ e $G_2(j\omega)$ para $z = 10$ e $p = 1$. Note que a fase de $G_1(j\omega)$ é menor que a de $G_2(j\omega)$. Tal efeito ocorre sempre que há zeros no semiplano direito do plano s . Por esta razão pode-se dizer que $G_1(s)$ é de fase mínima e $G_2(s)$ é de fase não mínima.

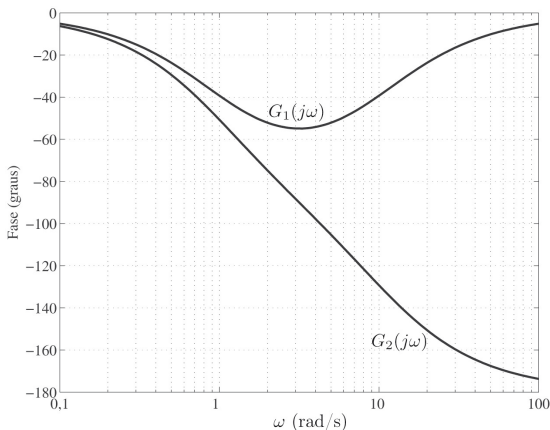


Figura 5.16 Gráficos da fase de $G_1(j\omega)$ e $G_2(j\omega)$.

Sistemas de fase mínima e de fase não mínima

Aplicando um degrau unitário na entrada do sistema $G_2(s)$, a saída $Y_2(s)$ é dada por

$$Y_2(s) = \frac{1 - s/z}{s(1 + s/p)} = \frac{p(-s + z)}{z s(s + p)} = \frac{1}{s} - \frac{(p + z)}{z} \frac{1}{(s + p)}. \quad (69)$$

No domínio do tempo tem-se que

$$y_2(t) = 1 - \frac{(p + z)}{z} e^{-pt}, \quad t \geq 0. \quad (70)$$

Os valores inicial e final da saída $y_2(t)$ são

$$y_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = -\frac{p}{z} < 0, \quad (71)$$

$$y_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 > 0. \quad (72)$$

Na Figura 5.17 é apresentado o gráfico da resposta $y_2(t)$ para o caso de $z = p = 1$. Note que a saída do sistema no instante inicial possui sinal contrário ao do valor final, tornando a resposta transitória mais lenta.

Sistemas de fase mínima e de fase não mínima

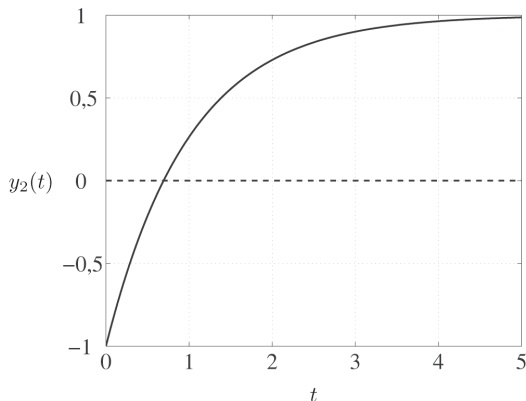


Figura 5.17 Gráfico da resposta ao degrau unitário do sistema $G_2(s)$ para $z = p = 1$.

Sistemas de fase não mínima estão presentes em diversas situações, tais como circuitos elétricos do tipo ponte, processos industriais, modelos macroeconômicos, etc. O seu controle por realimentação é, em geral, de projeto mais difícil.

Exercício

Determine as funções de transferência $G_1(s)$ e $G_2(s)$ correspondentes aos diagramas de Bode das Figuras 5.78 (a) e (b), respectivamente:

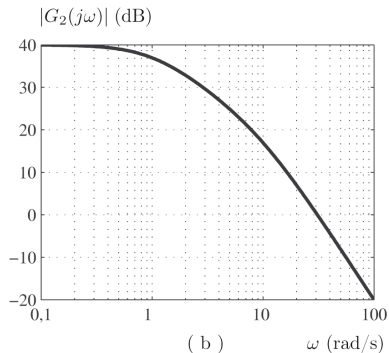
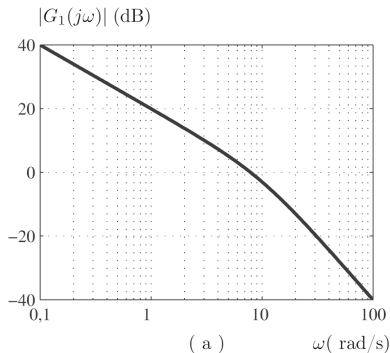


Figura 5.78 (a) Módulo de $G_1(j\omega)$. (b) Módulo de $G_2(j\omega)$.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 5.**