EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 8.3: Projeto de Controladores Digitais: Projeto de controlador no plano z

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: https://cfmorais.fee.unicamp.br/

Projeto de controlador no plano z

- A principal dificuldade dos projetos em z é a escolha dos polos de malha fechada, ou da região em que eles devem estar, para que resultem transientes aceitáveis com razoável robustez frente às variações da planta.
- Como as especificações de projeto são usualmente baseadas em índices de desempenho de respostas transitórias que possuem uma correspondência com os polos do plano s ($s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$), os polos do plano z podem ser obtidos por meio de um mapeamento dos polos em s (fazendo $z = e^{sT}$).
- Em vez de discretizarmos via mapeamento polo-zero um controlador $G_c(s)$ projetado para o par $G_{so}(s) + G_p(s)$ (função de transferência do segurador de ordem zero + processo) agora iremos fazer diretamente o projeto de $G_c(z)$ para o subsistema discreto equivalente a conversor D/A + processo + conversor A/D, ou seja, para $G_p(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$.

Exemplo 12.6

Considere o sistema da Figura 12.21.

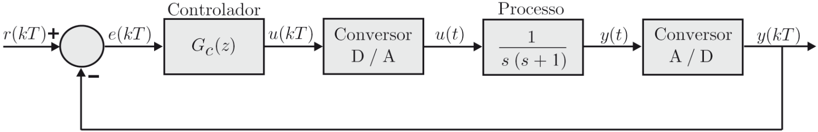

Figura 12.21 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Deseja-se projetar um controlador $G_c(z)$ de modo que a resposta $y(kT)$ para um degrau unitário na referência $r(kT)$ tenha um sobressinal máximo $M_p = 16{,}3\%$ e um tempo de pico $t_p = 1$s.

Solução: Exemplo 12.6

O primeiro passo consiste em converter as especificações de projeto, baseadas em índices de desempenho da resposta temporal (sobressinal e tempo de pico), nos correspondentes polos de malha fechada do plano s. A seguir, os polos do plano s são mapeados no plano z.
A função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{1}$$

cujos polos de malha fechada são

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d. \tag{2}$$

Para que os polos de malha fechada possam ser determinados basta calcular os valores do coeficiente de amortecimento ξ e da frequência natural não amortecida ω_n, que podem ser obtidos a partir do sobressinal M_p e do tempo de pico t_p, respectivamente. Assim,

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}100\% = 16{,}3\% \Rightarrow \xi \approxeq 0{,}5. \tag{3}$$

Solução: Exemplo 12.6

O tempo de pico t_p é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1s \Rightarrow \omega_d = \pi(\text{rad/s}). \tag{4}$$

Assim, a frequência natural não amortecida ω_n vale

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-0{,}5^2}} \Rightarrow \omega_n = 3{,}6276(\text{rad/s}) \tag{5}$$

O período T_d das oscilações do sinal de saída durante o transitório é dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\text{s}. \tag{6}$$

Na prática o período de amostragem T é escolhido como sendo pelo menos 10 vezes menor que o período das oscilações, ou seja,

$$T = \frac{T_d}{10} = 0{,}2\text{s}. \tag{7}$$

Solução: Exemplo 12.6

Para que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações de projeto ($M_p = 16{,}3\%$ e $t_p = 1$s) os polos de malha fechada devem estar localizados em

$$s_{1,2} \approxeq -1{,}8138 \pm \pi j. \tag{8}$$

No plano z os polos correspondentes são mapeados em

$$z_{1,2} = e^{Ts_{1,2}} = e^{-1{,}8138T \pm \pi T j} \approxeq 0{,}5629 \pm 0{,}4090j. \tag{9}$$

A função de transferência $G_p(z)$ do subsistema D/A + processo + A/D é dada por

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]. \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{-z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right) \\ &= \left(-1 + \frac{T}{z-1} + \frac{z-1}{z-e^{-T}}\right) \\ &= \frac{z\left(e^{-T} - 1 + T\right) + 1 - e^{-T} - Te^{-T}}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Para $T = 0{,}2s$ obtém-se

$$G_p(z) = \frac{z\left(e^{-T} - 1 + T\right) + 1 - e^{-T} - Te^{-T}}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)} = \frac{0{,}0187\,(z+0{,}9355)}{(z-1)\,(z-0{,}8187)}. \tag{12}$$

O diagrama de blocos do sistema discreto equivalente ao da Figura 12.21 é apresentado na Figura 12.22.

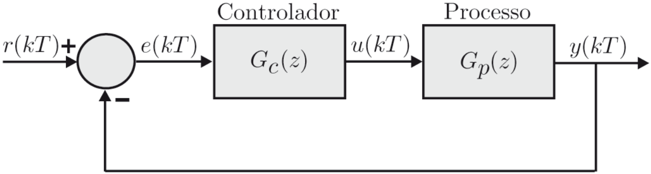

Figura 12.22 Diagrama de blocos do sistema discreto.

Para o projeto do controlador $G_c(z)$ podem ser utilizados os métodos do lugar das raízes ou da imposição algébrica de polos, que são idênticos aos do plano s, exceção feita ao limite da estabilidade, que no plano s é o eixo $j\omega$, e no plano z é a circunferência de raio unitário.

Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

Nesta técnica de projeto calcula-se uma função de transferência para o controlador $G_c(z)$ de modo que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechada desejados (9). Uma vez que isso ocorra o sistema em malha fechada irá apresentar o comportamento transitório desejado.
As especificações de projeto podem ser satisfeitas por meio de um controlador de primeira ordem, com função de transferência

$$G_c(z) = \frac{K\,(z + C_1)}{z + C_2}. \tag{13}$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G_{ma}(z) = G_c(z)G_p(z) = \frac{K\,(z + C_1)}{(z + C_2)}\frac{0{,}0187\,(z + 0{,}9355)}{(z - 1)\,(z - 0{,}8187)} \tag{14}$$

Existem infinitos valores para K, C_1 e C_2 que satisfazem às especificações de projeto. Uma solução é cancelar o zero do controlador com um polo da planta. Com isso os valores de C_2 e K podem ser calculados por meio das condições de fase e módulo, respectivamente.

Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

Assim, adotando $C_1 = -0{,}8187$, obtém-se

$$G_{ma}(z) = \frac{0{,}0187K(z + 0{,}9355)}{(z + C_2)(z - 1)}. \tag{15}$$

Da condição de fase, tem-se que

$$\angle G_{ma}(z) = \pm\text{múltiplo ímpar de } 180^o, \tag{16}$$

ou seja,

$$\angle z + 0{,}9355 - \angle z + C_2 - \angle z - 1 = -180^o. \tag{17}$$

O valor de C_2 deve ser calculado num dos polos de malha fechada $z_{1,2} \approxeq 0{,}5629 \pm 0{,}4090j$. Da Equação (17) obtém-se

$$\arctan\left(\frac{0{,}4090}{0{,}5629 + C_2}\right) \approxeq 58{,}37^o \Rightarrow C_2 \approxeq -0{,}3109. \tag{18}$$

Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

Na Figura 12.23 é apresentado o gráfico do lugar das raízes.

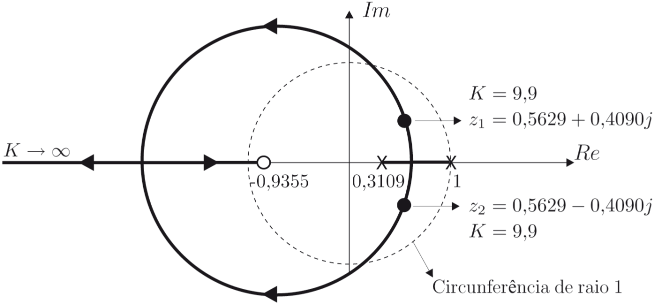

Figura 12.23 Lugar das raízes.

Solução: Exemplo 12.6 - por meio do lugar das raízes

O valor de K pode ser calculado por meio da condição de módulo, ou seja,

$$|G_{ma}(z)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{0{,}0187K(z+0{,}9355)}{(z-0{,}3109)(z-1)} \right| = 1. \tag{19}$$

Substituindo um dos polos complexos de malha fechada $z_{1,2} \approxeq 0{,}5629 \pm 0{,}4090j$ na Equação (19), obtém-se

$$K \approxeq 9{,}9. \tag{20}$$

Portanto, a função de transferência do controlador é dada por

$$G_c(z) = \frac{9{,}9(z-0{,}8187)}{z-0{,}3109}. \tag{21}$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$\begin{aligned} G_{ma}(z) = G_c(z)G_p(z) &= \frac{9{,}9\cancel{(z-0{,}8187)}}{z-0{,}3109} \frac{0{,}0187(z+0{,}9355)}{(z-1)\cancel{(z-0{,}8187)}} \\ &= \frac{0{,}1851z+0{,}1732}{z^2-1{,}311z+0{,}3108}. \end{aligned} \tag{22}$$

Solução: Exemplo 12.6 - por meio de imposição algébrica de polos

Nesta técnica de projeto a função de transferência do controlador $G_c(z)$ é calculada por meio de uma imposição algébrica de polos semelhante ao caso dos sistemas de tempo contínuo.

Os polos de malha fechada desejados (9) produzem o polinômio característico

$$\begin{aligned} F(z) &= (z - 0{,}5629 - 0{,}4090j)\,(z - 0{,}5629 + 0{,}4090j) \\ &= z^2 - 1{,}1258z + 0{,}48413714. \end{aligned} \tag{25}$$

A função de transferência do processo $G_p(z)$ tem grau $n = 2$. O controlador $G_c(z)$ deve ter grau $m \geq n - 1$. Assim, assumindo $m = 1$, a função de transferência do controlador é do tipo

$$G_c(z) = \frac{K(z + C_1)}{z + C_2}. \tag{26}$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(z) = G_c(z)G_p(z) = \frac{K(z + C_1)}{(z + C_2)} \frac{0{,}0187(z + 0{,}9355)}{(z - 1)(z - 0{,}8187)}. \qquad (27)$$

Supondo que o zero do controlador cancela o polo estável da planta, então

$$G(z) = \frac{0{,}0187K(z + 0{,}9355)}{(z + C_2)(z - 1)}. \qquad (28)$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(z}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} &= \frac{0{,}0187K(z + 0{,}9355)}{(z + C_2)(z - 1) + 0{,}0187K(z + 0{,}9355)} \\ &= \frac{0{,}0187K(z + 0{,}9355)}{z^2 + (0{,}0187K + C_2 - 1)z + 0{,}01749385K - C_2} \qquad (29) \end{aligned}$$

cujo polinômio característico é

$$F(z) = z^2 + (0{,}0187K + C_2 - 1)z + 0{,}01749385K - C_2. \qquad (30)$$

Comparando os polinômios (25) e (30), tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0187 & 1 \\ 0{,}01749385 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1258 \\ 0{,}48413741 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $C_2 \approxeq -0{,}3109$ e $K \approxeq 9{,}9$. Portanto, a função de transferência do controlador é dada por

$$G_c(z) = \frac{9{,}9(z - 0{,}8187)}{z - 0{,}3109}, \tag{32}$$

que é a mesma obtida pelo método do lugar das raízes.

Solução: Exemplo 12.6 - Resposta ao degrau

Substituindo os valores de $G(z)$ a função de transferência de malha fechada resulta

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{G_{ma}(z)}{1+G_{ma}(z)} = \frac{N_{ma}(z)}{D_{ma}(z)+N_{ma}(z)} = \\ &= \frac{0{,}1851z+0{,}1732}{z^2-1{,}1258z+0{,}4841} = \frac{0{,}1851z^{-1}+0{,}1732z^{-2}}{1-1{,}1258z^{-1}+0{,}4841z^{-2}}.\end{aligned} \tag{33}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e a propriedade do atraso, obtém-se a seguinte equação de diferenças

$$\begin{aligned}y(kT) = 1{,}1258y[(k-1)T] - 0{,}4841y[(k-2)T] \\ + 0{,}1851r[(k-1)T] + 0{,}1732r[(k-2)T].\end{aligned} \tag{34}$$

Sabendo-se que $y(-0{,}2) = y(-0{,}4) = 0$ e que $r(kT)$ é um degrau unitário, então os valores de $y(kT)$ podem ser calculados por meio da implementação da Equação (34) num programa de computador. A seguir é apresentado o trecho de um programa, escrito na linguagem C, que calcula os valores da sequência y(kT) para $k = 0{,}1{,}2,\ldots,10$.

Solução: Exemplo 12.6 - Resposta ao degrau

Tabela 12.3 Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$

```
yk_1=0;
yk_2=0;
rk_1=0;
rk_2=0;
for (k=0;k<=10;k++)
{
   if (k==1) rk_1=1;
   if (k==2) rk_2=1;
   yk =1.1258*yk_1-0.4841*yk_2+0.1851*rk_1+0.1732*rk_2;
   yk_2=yk_1;
   yk_1=yk;
}
```

k	kT	$y(kT)$
0	0,0	0
1	0,2	0,1851
2	0,4	0,5667
3	0,6	0,9067
4	0,8	1,1047
5	1,0	1,1630
6	1,2	1,1329
7	1,4	1,0707
8	1,6	1,0152
9	1,8	0,9829
10	2,0	0,9734

Solução: Exemplo 12.6 - Resposta ao degrau

Na Figura 12.24 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau unitário $y(kT)$ com o efeito de um segurador. Note que a resposta apresenta o sobressinal ($M_p \approx 16{,}3\%$) e o tempo de pico ($t_p = 1$s) de acordo com as especificações de projeto do controlador. Além disso, com o controlador $G_c(z)$ foi possível reduzir o sobressinal e acelerar as respostas do sistema sem controlador apresentadas na Figura 12.20.

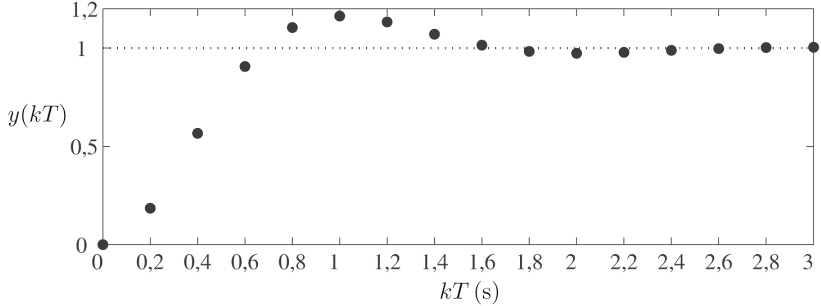

Figura 12.24 Resposta ao degrau unitário.

Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. "Controle Automático", 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 12.**