

# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 8.2: Projeto de Controladores Digitais:  
Projeto de controlador discreto a partir de  
controlador contínuo

**Professora:** Cecília de Freitas Moraes

**Auxiliar didático (PED):** Artêmio Andrade Barros

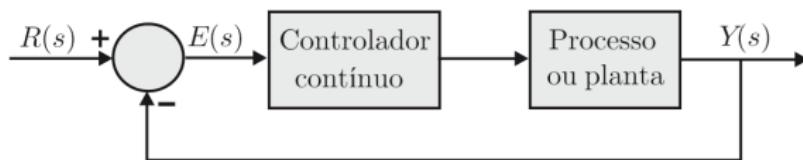
e-mails: cfmorais@unicamp.br

a242988@dac.unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

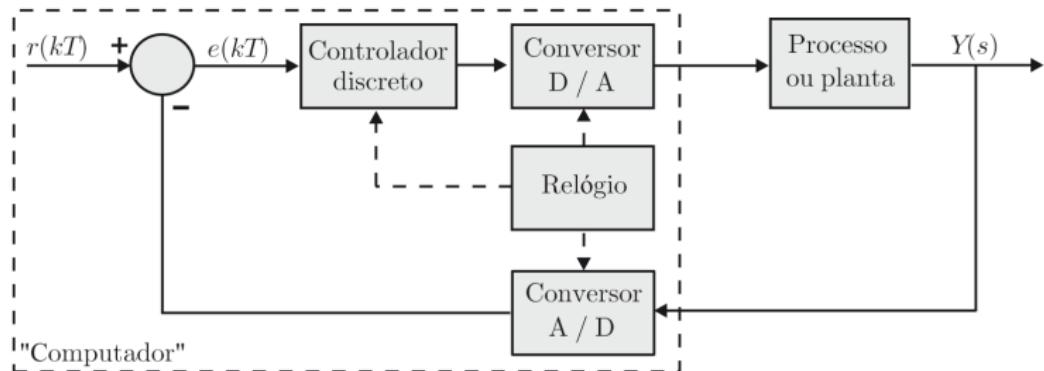
Suponha o sistema de tempo contínuo e o projeto do controlador realizado inteiramente no plano  $s$  de Laplace. A questão é obter um controlador discreto por meio de uma das aproximações analisadas anteriormente. Considere o sistema de controle contínuo da Figura 12.6.



**Figura 12.6** Sistema de controle contínuo.

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

Para trocar o controlador contínuo por um discreto é preciso adicionar os blocos de conversores A/D (análogo/digital) e D/A (digital/análogo), conforme representado na Figura 12.7.



**Figura 12.7** Sistema de controle discreto.

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

O processo de amostragem e o circuito segurador, representados pelos conversores A/D e D/A, introduzem na malha um atraso de tempo que reduz a estabilidade do sistema, fato que deve de antemão ser considerado no projeto do controlador contínuo. Caso contrário, quando o controlador discreto for implementado o sistema resultante poderá ser instável em malha fechada. Conforme visto anteriormente, a função de transferência do segurador de ordem zero é dada por

$$G_{so}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (1)$$

Em uma primeira aproximação, a exponencial  $e^{-sT}$  pode ser representada na forma racional através da aproximação de Padé<sup>1</sup> de ordem 1, ou seja,

$$e^{-sT} \approx \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} = \frac{2 - sT}{2 + sT}. \quad (2)$$

Substituindo a Equação (2) na Equação (1), obtém-se

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{2 - sT}{2 + sT} \right) = \frac{2sT}{s(2 + sT)} = \frac{2}{s + \frac{2}{T}}. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>As aproximações de Padé de ordem superior são muito mais precisas, porém aumentam a ordem da função de transferência e a complexidade do projeto do controlador. Neste caso é fundamental o emprego de ferramentas computacionais, como, por exemplo, o MATLAB.

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

Note que os ganhos em baixas frequências das Equações (1) e (3) não são unitários. O interesse na Equação (3) é determinar uma função de transferência racional que represente apenas o atraso de fase ocasionado pelo segurador de ordem zero e que não afete o ganho da malha fechada, já que o mesmo será determinado no projeto do controlador.

Corrigindo o ganho da Equação (3), de modo que em baixas frequências ( $s = j\omega = 0$ ) o mesmo seja unitário, obtém-se uma função de transferência racional aproximada para o segurador de ordem zero, dada por

$$G_{so}(s) = \frac{\frac{2}{T}}{s + \frac{2}{T}}. \quad (4)$$

Assim, o controlador contínuo deve ser projetado com base no diagrama de blocos da Figura 12.8, isto é, prevendo a função de transferência do segurador de ordem zero aproximada.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Em algumas aplicações pode-se desprezar o bloco do segurador sem degradação significativa do desempenho. Esses casos podem ser verificados por simulação computacional.

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

Quanto menor for o período de amostragem  $T$ , menor a influência na estabilidade do sistema. Por esta razão este deve ser escolhido suficientemente “pequeno”, como aliás indica o teorema da amostragem.

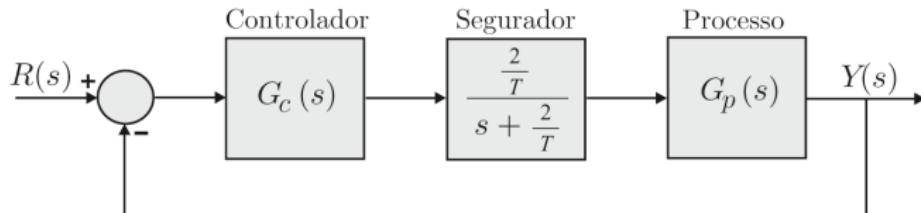


Figura 12.8 Sistema de controle contínuo com segurador.

Finalmente, o controlador discreto é obtido por meio de uma aproximação do controlador contínuo  $G_c(s)$  por um dos métodos analisados anteriormente (Tustin, mapeamento polo-zero, etc.).

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

Como se sabe, as especificações de projeto do controlador costumam ser realizadas em termos dos parâmetros da resposta temporal, como, por exemplo: sobressinal  $M_p$ , tempo de subida  $t_r$ , tempo de pico  $t_p$  ou tempo de acomodação  $t_s$ . Estes parâmetros estão indicados na Figura 12.9, que representa a resposta temporal típica de um sistema de segunda ordem subamortecido ( $0 < \xi < 1$ ).

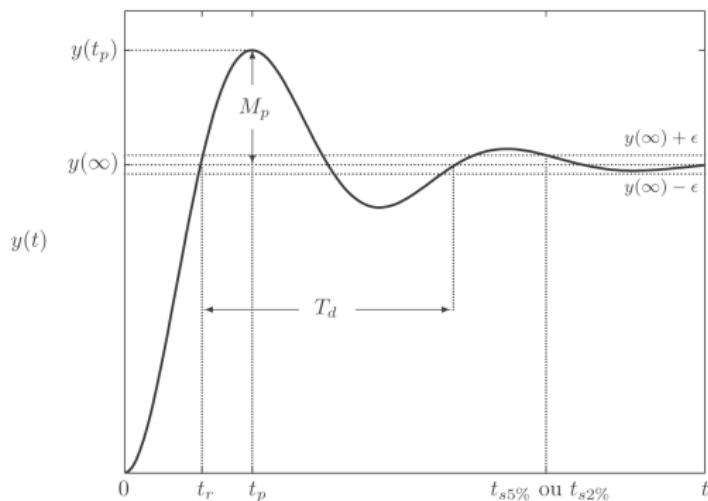


Figura 12.9 Resposta temporal de um sistema de segunda ordem para  $0 < \xi < 1$ .

# Projeto de controlador discreto a partir do contínuo

Conforme analisado anteriormente para sistemas subamortecidos ( $0 < \xi < 1$ ), os parâmetros da resposta temporal da Figura 12.9 valem:

$$\text{Sobressinal: } M_p(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} 100\%; \quad (5)$$

$$\text{Tempo de pico: } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}; \quad (6)$$

$$\text{Tempo de subida: } t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_d}; \quad (7)$$

$$\text{Tempo de acomodação (critério 5\%): } t_s \approx \frac{3}{\xi \omega_n}; \quad (8)$$

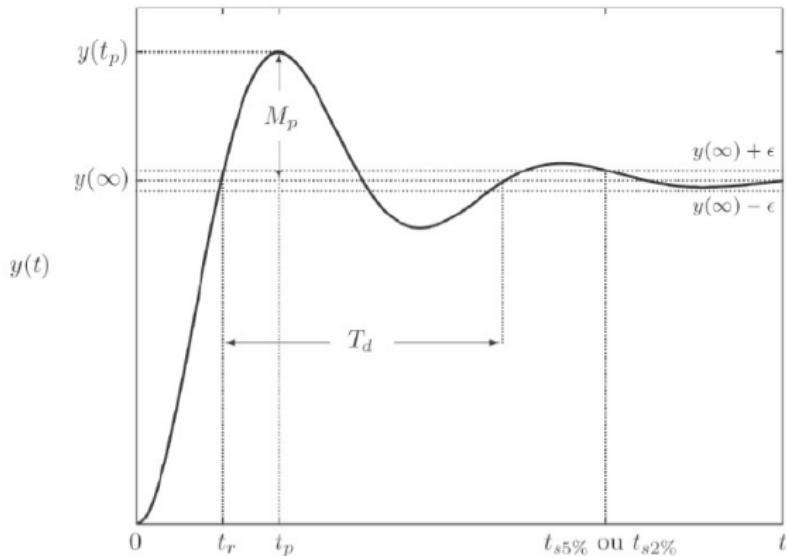
$$\text{Tempo de acomodação (critério 2\%): } t_s \approx \frac{4}{\xi \omega_n}; \quad (9)$$

$$\text{Período das oscilações: } T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}; \quad (10)$$

sendo  $\xi$  o coeficiente de amortecimento,  $\omega_n$  a frequência natural não amortecida e  $\omega_d$  a frequência natural amortecida.

# Resumo das fórmulas dos parâmetros do sistema subamortecido + gráfico

FT do sistema subamortecido:  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$



$$M_p(\%) = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_d}$$

$$t_s(5\%) \cong \frac{3}{\xi \omega_n}$$

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\xi \omega_n}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

## Exemplo 12.4

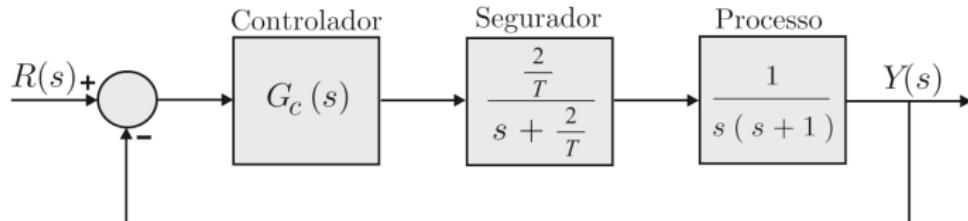
Deseja-se projetar um controlador discreto para um processo com função de transferência

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad (11)$$

de modo que a resposta para um degrau aplicado na referência tenha um sobressinal máximo  $M_p = 16,3\%$  e um tempo de pico  $t_p = 1\text{s}$ .

### Solução

O controlador discreto pode ser obtido por meio de uma aproximação do controlador contínuo. Considerando-se o efeito do segurador de ordem zero, o controlador contínuo deve ser projetado para o diagrama de blocos da Figura 12.10.



**Figura 12.10** Diagrama de blocos do sistema contínuo com segurador.

## Exemplo 12.4

Supondo que o sistema em malha fechada tenha dinâmica dominada por um par de polos complexos,<sup>3</sup> o coeficiente de amortecimento  $\xi$  é obtido a partir do sobressinal  $M_p$ , ou seja,

$$M_p(\%) = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100\% \Rightarrow \ln M_p = \ln 0,163 = \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln(0,163)^2}{\pi^2 + \ln(0,163)^2}} \approx 0,5. \quad (12)$$

O tempo de pico  $t_p$  é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1s \Rightarrow \omega_d = \pi(\text{rad/s}), \quad (13)$$

sendo  $\omega_d$  a frequência natural amortecida dada por  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ .

Assim, a frequência natural não amortecida  $\omega_n$  vale

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - 0,5^2}} \Rightarrow \omega_n = 3,628(\text{rad/s}). \quad (14)$$

A resposta temporal da saída, para uma entrada do tipo degrau na referência, irá apresentar oscilações durante o transitório, com período  $T_d$ , dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 s. \quad (15)$$

---

<sup>3</sup>Caso esta suposição não seja razoável, os polos de malha fechada devem ser escolhidos por meio de tentativas de  $G_c(s)$  buscando a estabilidade e o sobressinal desejado.

## Exemplo 12.4

Na prática o período de amostragem  $T$  é escolhido como sendo pelo menos 10 vezes menor que o período das oscilações, ou seja,

$$T = \frac{T_d}{10} = 0,2 \text{ s.} \quad (16)$$

Logo, a função de transferência aproximada do segurador de ordem zero é dada por

$$G_{so}(s) = \frac{\frac{2}{T}}{s + \frac{2}{T}} = \frac{10}{s + 10}. \quad (17)$$

A função de transferência genérica de um sistema de segunda ordem é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (18)$$

cujos polos de malha fechada são

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d. \quad (19)$$

Para que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações de projeto ( $M_p = 16,3\%$  e  $t_p = 1s$ ), os polos de malha fechada devem estar localizados em

$$s_{1,2} \approx -1,81 \pm \pi j. \quad (20)$$

## Exemplo 12.4: Projeto por meio do lugar das raízes

Nesta técnica de projeto calcula-se uma função de transferência para o controlador  $G_c(s)$ , de modo que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechada desejados (20).

As especificações de projeto podem ser satisfeitas através de um controlador de primeira ordem, com função de transferência

$$G_c(s) = \frac{K(s + C_1)}{s + C_2}. \quad (21)$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G_{so}(s)G_p(s) = \frac{K(s + C_1)}{(s + C_2)} \frac{10}{(s + 10)} \frac{1}{s(s + 1)}. \quad (22)$$

Existem infinitos valores para  $K$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  que satisfazem às especificações de projeto. Uma solução é cancelar o zero do controlador com um polo da planta. Com isso os valores de  $C_2$  e  $K$  podem ser calculados por meio das condições de fase ( $\angle G_{ma}(s) = \pm 180^\circ$ ) e módulo ( $|G_{ma}(s)| = 1$ ), respectivamente.

## Exemplo 12.4: Projeto por meio do lugar das raízes

Assim, adotando  $C_1 = 1$ , obtém-se

$$G_{ma}(s) = \frac{10K}{s(s + 10)(s + C_2)}. \quad (23)$$

Da condição de fase tem-se que

$$\angle G_{ma}(s) = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ, \quad (24)$$

ou seja,

$$-\angle s - \angle s + 10 - \angle s + C_2 = 180^\circ. \quad (25)$$

O valor de  $C_2$  deve ser calculado num dos polos complexos de malha fechada  $s_{1,2} \approx -1,81 \pm \pi j$ . Da expressão (25) obtém-se

$$-120^\circ - 21^\circ - \arctan\left(\frac{\pi}{C_2 - 1,81}\right) = 180^\circ \Rightarrow C_2 \approx 5,69. \quad (26)$$

## Exemplo 12.4: Projeto por meio do lugar das raízes

Na Figura 12.11 é apresentado o gráfico do lugar das raízes

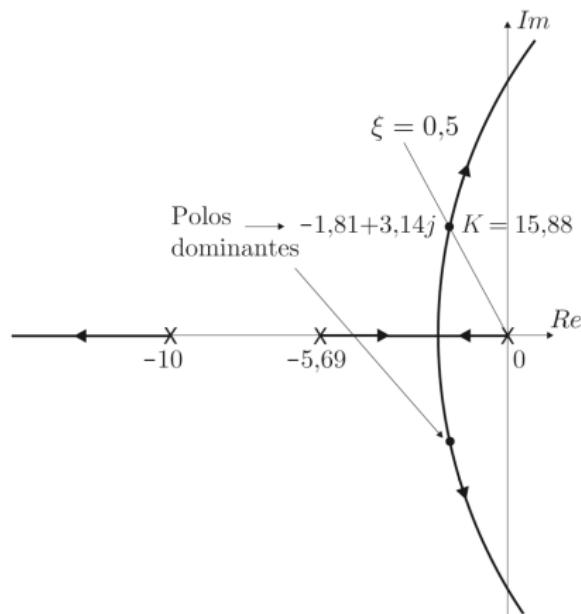


Figura 12.11 Lugar das raízes.

## Exemplo 12.4: Projeto por meio do lugar das raízes

O valor de  $K$  pode ser calculado através da condição de módulo, ou seja,

$$|G_{ma}(s)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{10K}{s(s+10)(s+5,69)} \right| = 1. \quad (27)$$

Substituindo um dos polos complexos de malha fechada  $s_{1,2} \approx -1,81 \pm \pi j$  em (27), obtém-se

$$K \approx 15,88. \quad (28)$$

Portanto, a função de transferência do controlador contínuo é dada por

$$G_c(s) = \frac{15,88(s+1)}{s+5,69}. \quad (29)$$

e a função de transferência de malha fechada ( $G_{mf}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ ) é dada por

$$G_{mf}(s) = \frac{G_{ma}(s)}{1 + G_{ma}(s)} = \frac{N_{ma}(s)}{D_{ma}(s) + N_{ma}(s)} = \frac{158,8}{s^3 + 15,69s^2 + 56,9s + 158,8}. \quad (30)$$

Os polos de malha fechada da Equação (30) são  $s_{1,2} \approx -1,81 \pm 3,14j$ ,  $s_3 = -12,06$ . Como os polos complexos estão bem mais próximos do eixo imaginário que o polo real estes são chamados de polos dominantes, ou seja, são os polos complexos que irão determinar a característica da resposta transitória. Por esta razão o sistema de terceira ordem terá comportamento próximo daquele do sistema de segunda ordem.

## Exemplo 12.4: Função de transferência do controlador discreto

A função de transferência do controlador discreto pode ser obtida por meio do método do mapeamento polo-zero. O zero em  $s = -1$  é mapeado em  $z = e^{-T}$ , e o polo em  $s = -5,69$  é mapeado em  $z = e^{-5,69T}$ . Como  $G_c(s)$  possui um polo ( $n = 1$ ) e um zero finito ( $m = 1$ ), então não é necessário acrescentar fatores de  $(z + 1)$  no numerador do controlador discreto, ou seja,

$$G_c(z) = \frac{K_z(z - e^{-T})}{z - e^{-5,69T}} = \frac{K_z(z - 0,8187)}{z - 0,3205}. \quad (31)$$

O ganho  $K_z$  é ajustado para que em baixas frequências o ganho do controlador contínuo  $G_c(s)$  seja igual ao do controlador discreto  $G_c(z)$ , ou seja,

$$G_c(s)|_{s=0} = G_c(z)|_{z=1} \Rightarrow \frac{15,88}{5,69} = \frac{K_z(1 - 0,8187)}{1 - 0,3205} \Rightarrow K_z \approx 10,46. \quad (32)$$

Portanto,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G_c(z) = \frac{10,46(z - 0,8187)}{z - 0,3205} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{10,46(1 - 0,8187z^{-1})}{1 - 0,3205z^{-1}}. \quad (33)$$

Aplicando a propriedade do atraso, obtém-se a seguinte equação de diferenças:

$$u(kT) = 0,3205u[(k-1)T] + 10,46(e(kT) - 0,8187e[(k-1)T]). \quad (34)$$

## Exemplo 12.4: Função de transferência do controlador discreto

Sabendo-se que  $u(-0,2) = e(-0,2) = 0$  e que  $r(kT)$  é um degrau unitário, ou seja,

$$r(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (35)$$

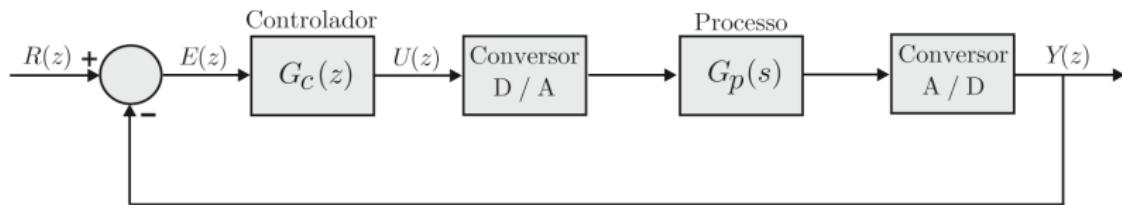
então a Equação (34) pode ser implementada num programa de computador. Na Figura 12.12 é apresentado o trecho de um programa, escrito na linguagem C, que exemplifica a realização do controlador para  $k = 0,1,2,\dots,100$ .

```
uk_1=0;
ek_1=0;
rk=1;
for (k=0;k<=100;k++)
{
    ek=rk-yk;
    uk =0.3205*uk_1+10.46*(ek-0.8187*ek_1);
    uk_1=uk;
    ek_1=ek;
}
```

**Figura 12.12** Realização do controlador discreto na linguagem C.

## Exemplo 12.4: Resposta ao degrau

Para verificar se o controlador discreto  $G_c(z)$  da Equação (33) satisfaz às especificações de projeto pode-se comparar a resposta (??) com a resposta ao degrau do sistema da Figura 12.13.



**Figura 12.13** Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com controlador discreto.

Da Figura 12.13 tem-se que

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2(s + 1)} \right] \\ &= \frac{0,0187(z + 0,9355)}{(z - 1)(z - 0,8187)}. \end{aligned} \quad (36)$$

## Exemplo 12.4: Resposta ao degrau

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G_c(z)G_p(z) = \frac{10,46(z - 0,8187)}{(z - 0,3205)} \frac{0,0187(z + 0,9355)}{(z - 1)(z - 0,8187)} = \frac{0,1959(z + 0,9355)}{(z - 0,3205)(z - 1)}. \quad (37)$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)} = \frac{0,1959z + 0,1833}{z^2 - 1,1246z + 0,5038} = \frac{0,1959z^{-1} + 0,1833z^{-2}}{1 - 1,1246z^{-1} + 0,5038z^{-2}}. \quad (38)$$

Aplicando a propriedade do atraso, obtém-se a seguinte equação de diferenças:

$$y(kT) = 1,1246y[(k-1)T] - 0,5038y[(k-2)T] + 0,1959r[(k-1)T] + 0,1833r[(k-2)T]. \quad (39)$$

Sabendo-se que  $y(-0,2) = y(-0,4) = 0$  e que  $r(kT)$  é um degrau unitário, então os valores de  $y(kT)$  podem ser calculados por meio da implementação da Equação (39) num programa de computador. A seguir é apresentado o trecho de um programa, escrito na linguagem C, que calcula os valores da sequência  $y(kT)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, 15$ .

## Exemplo 12.4: Resposta ao degrau

Tabela 12.1 Programa e coeficientes para  $k = 0, 1, 2, \dots, 15$

```
yk_1=0;
yk_2=0;
rk_1=0;
rk_2=0;
for (k=0;k<=15;k++)
{
    if (k==1) rk_1=1;
    if (k==2) rk_2=1;
    yk =1.1246*yk_1-0.5038*yk_2+0.1959*rk_1+0.1833*rk_2;
    yk_2=yk_1;
    yk_1=yk;
}
```

$k$	$kT$	$y(kT)$
0	0,0	0
1	0,2	0,1959
2	0,4	0,5995
3	0,6	0,9547
4	0,8	1,1508
5	1,0	1,1924
6	1,2	1,1404
7	1,4	1,0610
8	1,6	0,9978
9	1,8	0,9668
10	2,0	0,9638
11	2,2	0,9760
12	2,4	0,9912
13	2,6	1,0022
14	2,8	1,0069
15	3,0	1,0067

## Exemplo 12.4: Resposta ao degrau

Na Figura 12.14 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada contínuo (30) e discreto (39). Note que as respostas estão próximas das especificações de projeto e que a curva  $y(t)$  possui um atraso devido à aproximação do seguidor de ordem zero.

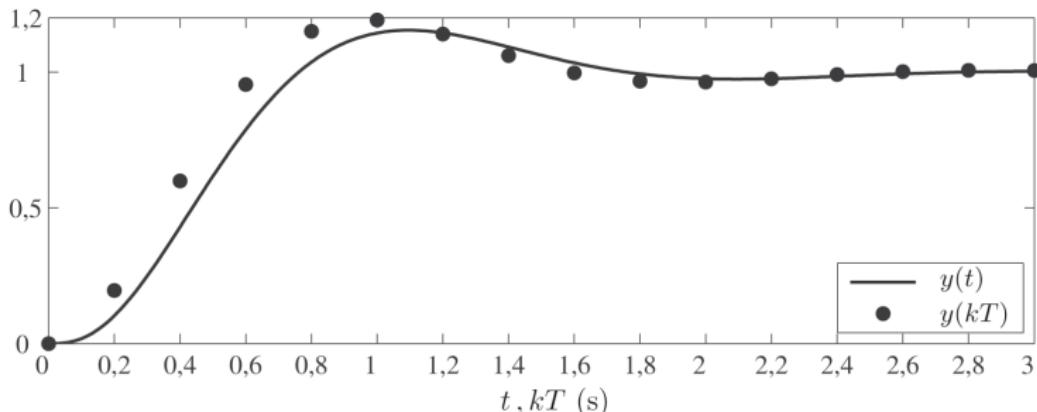


Figura 12.14 Resposta ao degrau unitário.

# Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M.  
“Controle Automático”, 2<sup>a</sup> edição, LTC, 2018.  
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 12.**