EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 7.1: Sistemas de Controle Digital: Introdução, Conversor A/D e D/A, Análise Frequencial da Amostragem e da Recuperação, Filtro Ideal e Segurador de Ordem Zero

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: https://cfmorais.fee.unicamp.br/

A Figura 11.1 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de controle digital com realimentação. A planta é o sistema dinâmico a ser controlado. O atuador é o dispositivo de potência, através do qual o controlador consegue atuar na planta. O sensor é o elemento de medição, que converte uma grandeza física da saída da planta num sinal eletrônico. O sinal proveniente da saída do sensor é um sinal analógico que é convertido para digital por meio de um conversor A/D. Da mesma forma, o sinal digital proveniente da saída do controlador é convertido para analógico por meio de um conversor D/A. O sincronismo de conversão dos sinais é realizado por um relógio. A referência, ou *set-point*, é ajustada internamente ao "computador".

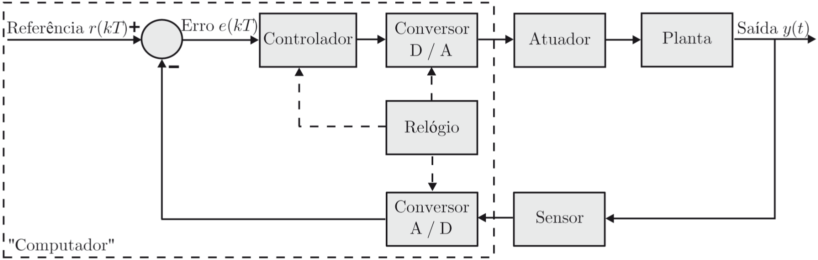


Figura 11.1 Diagrama de blocos de um sistema de controle digital.

Uma configuração alternativa para o sistema de controle digital é apresentada na Figura 11.2, onde a referência é ajustada externamente ao "computador" e as dinâmicas do atuador, da planta e do sensor são representadas por meio de um único bloco, denominado processo.

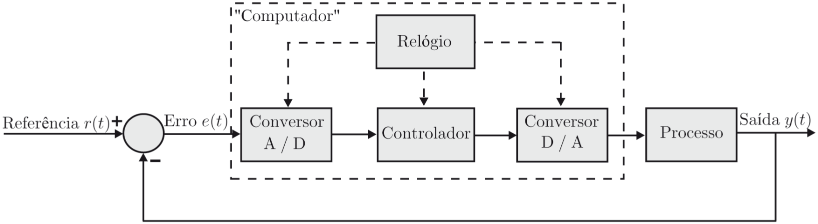


Figura 11.2 Diagrama de blocos de um sistema de controle digital.

Os sistemas de controle digital são portanto híbridos, no sentido de que neles comparecem tanto sinais discretos quanto contínuos no tempo. O analista tem obviamente duas opções para descrever a dinâmica do sistema em malha fechada: totalmente por transformada de Laplace ou totalmente por transformada $\mathcal{Z}$.

Conversor A/D

O conversor A/D tem a função de converter um sinal analógico $y(t)$ num sinal $y(kT)$ discreto no tempo e discreto em amplitude, conforme representado na Figura 11.3. O sinal $y(kT)$ é discreto em amplitude porque é expresso em código binário, em número finito de dígitos. Esse fato significa que em geral $y(kT)$ representa o sinal no instante kT com algum erro ou incerteza.

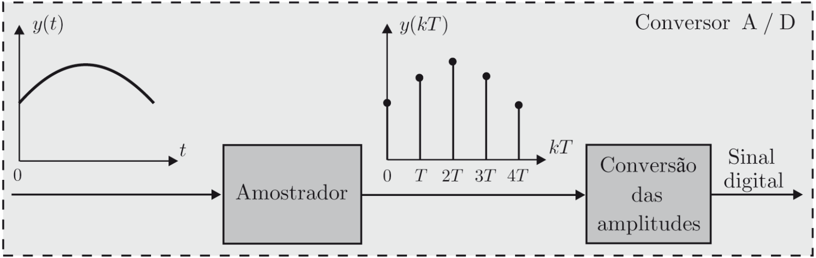


Figura 11.3 Conversor A/D.

Um amostrador também pode ser representado simplificadamente por uma chave que amostra um sinal contínuo $y(t)$ a cada T períodos de amostragem, conforme a Figura 11.4.

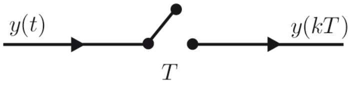


Figura 11.4 Representação simplificada de um amostrador.

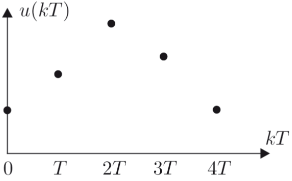
Assim, o conversor A/D consiste em duas etapas subsequentes: a amostragem, que converte um sinal analógico $y(t)$ numa sequência de pulsos $y(kT)$, e a conversão das amplitudes desses pulsos num sinal digital.

O conversor D/A, representado na Figura 11.5, é um dispositivo eletrônico que tem a função de converter uma sequência de entrada $u(kT)$ num sinal de tempo contínuo $u(t)$, isto é, que assume valores em qualquer instante t.

Figura 11.5 Representação de um conversor D/A.

Há vários métodos de conversão de um sinal digital em analógico, sendo que o mais usual recebe o nome de segurador de ordem zero. Dada uma sequência de entrada $u(kT)$, o conversor D/A ou segurador de ordem zero gera na sua saída um sinal $u(t)$, conforme indicado na Figura 11.6. O termo "ordem zero" decorre do fato de a função $u(t)$ ser aproximada em cada intervalo $[kT, (k+1)T)$ por um valor constante, ou seja, por um polinômio de ordem zero.

Conversor D/A



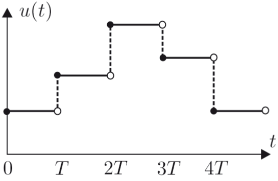


Figura 11.6 Entrada $u(kT)$ e saída $u(t)$ de um conversor D/A de ordem zero.

Analiticamente, define-se

$$u(t) = u(kT) \qquad \text{para} \qquad kT \leq t < (k+1)T, \tag{1}$$

ou seja, $u(t)$ é uma função constante por trechos (*piecewise constant*) e contínua à direita.

Na prática, não é comum o emprego de conversores de ordem maior que zero devido às dificuldades que surgem no sistema de controle devido à geração de ruídos de alta frequência.

Matematicamente é conveniente representar o processo de amostragem em duas partes, conforme é mostrado na Figura 11.7. O sinal analógico $f(t)$ é modulado (multiplicado) por um trem de impulsos $s(t)$ produzindo o sinal amostrado $f^*(t)$, que depois é convertido para o código digital, resultando em $f(kT)$.

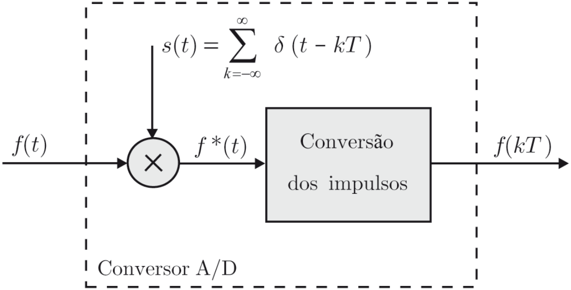


Figura 11.7 Conversor A/D ideal.

Análise frequencial da amostragem e da recuperação

O sinal $s(t)$ é o trem de impulsos dado por

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \tag{2}$$

sendo $\delta(t - kT)$ a função delta de Dirac, que é igual a zero, exceto em $t = kT$.

Sendo o sinal $s(t)$ periódico, este pode ser representado através de série de Fourier

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_A kt}. \tag{3}$$

Os coeficientes c_k da série de Fourier são dados por

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\omega_A kt} dt, \tag{4}$$

sendo $\omega_A = 2\pi/T$ a frequência de amostragem.

Das expressões (2) e (4), obtém-se

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)e^{-j\omega_A kt}dt. \tag{5}$$

Como no intervalo de integração da Equação (5), o impulso ocorre apenas em $k=0$, então

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{0}dt = \frac{1}{T}. \tag{6}$$

Introduzindo o resultado (6) na Equação (3), obtém-se

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}e^{j\omega_A kt}. \tag{7}$$

De acordo com a Figura 11.7, o sinal amostrado $f^*(t)$ é dado por

$$f^*(t) = f(t)s(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT). \tag{8}$$

Análise frequencial da amostragem e da recuperação

Da Equação (7) tem-se que

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j\omega_A k t}. \tag{9}$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (9), obtém-se

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_{0_-}^{\infty} f^*(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j\omega_A k t} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-(s - j\omega_A k)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - j\omega_A k). \end{aligned} \tag{10}$$

Fazendo $s = j\omega$ na Equação (10), obtém-se

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega - j\omega_A k). \tag{11}$$

Este resultado mostra que o espectro de frequência de um sinal amostrado $f^*(t)$ consiste em repetidas cópias do espectro de frequência de $f(t)$, deslocadas de múltiplos inteiros da frequência de amostragem ω_A.

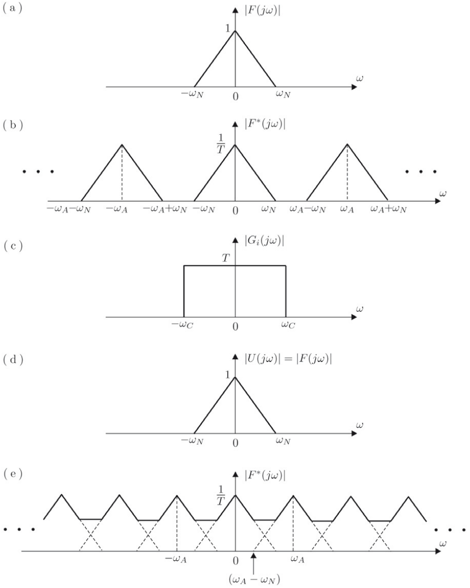


Figura 11.8 (a) Espectro de frequência do sinal original. (b) Espectro de frequência do sinal amostrado quando $\omega_A > 2\omega_N$. (c) Espectro de frequência do filtro passa-baixas ideal. (d) Reconstrução do sinal original a partir do sinal amostrado quando $\omega_A > 2\omega_N$. (e) Espectro de frequência do sinal amostrado quando $\omega_A \leq 2\omega_N$, mostrando a sobreposição de bandas.

Análise frequencial da amostragem e da recuperação

Na Figura 11.8 (a) é apresentado o espectro de frequência $|F(j\omega)|$ do sinal original, suposto com banda limitada, onde a componente não nula de maior frequência ω_N. A Figura 11.8 (b) apresenta o espectro de frequência $|F^*(j\omega)|$ do sinal amostrado quando

$$\omega_A - \omega_N > \omega_N \qquad \text{ou} \qquad \omega_A > 2\omega_N. \tag{12}$$

Para $\omega_A > 2\omega_N$ não ocorre sobreposição de bandas quando as cópias de $F(j\omega)$ são adicionadas. Consequentemente o sinal $f(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal amostrado $f^*(t)$ através de um filtro passa-baixas ideal com o espectro de frequência $|G_i(j\omega)|$ da Figura 11.8 (c).

Da Figura 11.9 tem-se que

$$U(j\omega) = G_i(j\omega)F^*(j\omega). \tag{13}$$

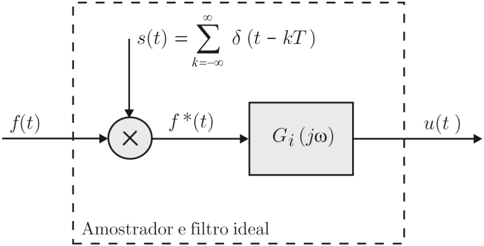


Figura 11.9 Recuperação de um sinal contínuo através de um filtro ideal.

Se o filtro passa-baixas ideal $G_i(j\omega)$ possui ganho T e frequência de corte ω_C tal que

$$\omega_N < \omega_C < (\omega_A - \omega_N), \tag{14}$$

então,

$$U(j\omega) = F(j\omega). \tag{15}$$

Análise frequencial da amostragem e da recuperação

Se a desigualdade (12) não for válida, ou seja, se $\omega_A \leq 2\omega_N$, então irá ocorrer uma sobreposição de bandas, conforme mostrado na Figura 11.8 (e). Neste caso o sinal $u(t)$ não irá representar o sinal de entrada original, apresentado uma distorção denominada *aliasing*.

Teorema 11.1 Teorema de amostragem de Shannon

Seja $f(t)$ um sinal de banda limitada tal que $F(j\omega) = 0$ para $\omega > \omega_N$. Então, o sinal $f(t)$ pode ser determinado a partir de suas amostras $f(kT)$, se

$$\omega_A > 2\omega_N \tag{16}$$

sendo $\omega_A = 2\pi/T$ a frequência de amostragem.

Portanto, para recuperar o sinal original sem distorção a partir do sinal amostrado com frequência ω_A é necessário que $\omega_A/2$ seja maior que todas as frequências presentes no sinal original. Na prática recomenda-se um amplo coeficiente de segurança na escolha da frequência de amostragem, como, por exemplo, $\omega_A \geq 10\omega_N$.

Exemplo 11.1

No processo de amostragem da função $f(t) = \text{sen}(t)$, que possui frequência de 1(rad/s), se a frequência de amostragem for $\omega_A = 4/3$(rad/s), o sinal amostrado $f(kT)$ resulta com frequência de 1/3(rad/s), que é diferente do sinal original, conforme é mostrado na Figura 11.10 (a).
Se a frequência de amostragem ω_A for igual ao dobro da frequência de $f(t)$, o sinal amostrado $f(kT)$ pode ser sempre nulo e não representar sinal algum, conforme se vê na Figura 11.10 (b).

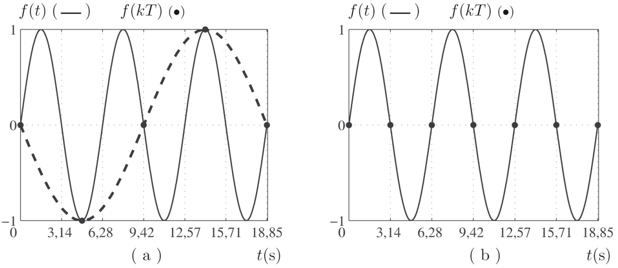


Figura 11.10 (a) Amostragem com $\omega_A = 4/3$ (rad/s). (b) Amostragem com $\omega_A = 2$ (rad/s).

Subsistema A/D + controlador + D/A

Considere o subsistema da Figura 11.11, formado pelo conjunto A/D + controlador + D/A. Conforme mencionado anteriormente, o conversor A/D possui a função de amostrador e o conversor D/A possui usualmente a função de segurador de ordem zero.

Figura 11.11 Subsistema A/D + controlador + D/A.

Subsistema A/D + controlador + D/A

Não é possível descrever este subsistema por meio da transformada de Laplace, pois os sinais envolvidos nesses blocos são analógicos e digitais. Porém, supondo que o controlador apenas transfere a saída do conversor A/D para o conversor D/A, sem efetuar cálculo algum, ou seja, $f(kT) = u(kT)$, pode-se representar o subsistema por um amostrador e por um segurador de ordem zero conforme a Figura 11.12.

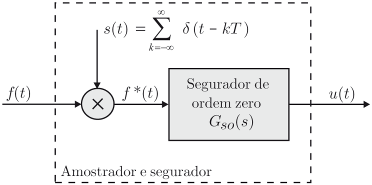


Figura 11.12 Representação de um amostrador e segurador de ordem zero sem controlador.

Da Figura 11.12 tem-se que a função de transferência do segurador de ordem zero é dada por

$$G_{so}(s) = \frac{U(s)}{F^*(s)}. \tag{17}$$

Quando a entrada $f^*(t)$ é um impulso, a saída $u(t)$ é um pulso que corresponde a um degrau unitário $d(t)$ no instante zero menos um degrau unitário $d(t-T)$ no instante T, conforme mostrado na Figura 11.13.

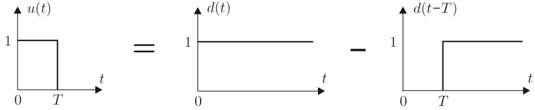


Figura 11.13 Pulso de saída $u(t)$.

Logo, a transformada de Laplace de $u(t)$ é dada por

$$U(s) = \mathcal{L}\left[d(t)\right] - \mathcal{L}\left[d(t-T)\right] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}. \tag{18}$$

Como $F^*(s) = 1$, então a função de transferência do segurador de ordem zero é dada por

$$G_{so}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}. \tag{19}$$

Filtro ideal e segurador de ordem zero

Conforme apresentado anteriormente, o processo de amostragem introduz no domínio da frequência um número infinito de componentes, além da componente principal. Para filtrar essas componentes excedentes em altas frequências seria necessária a implementação de um filtro passa-baixas ideal com o espectro de frequência da Figura 11.14.

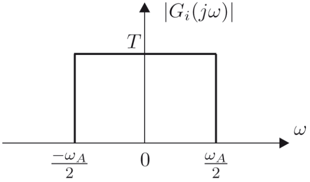


Figura 11.14 Espectro de frequência de um filtro passa-baixas ideal.

A Figura 11.15 apresenta o espectro de frequência de um sinal antes e depois da filtragem.

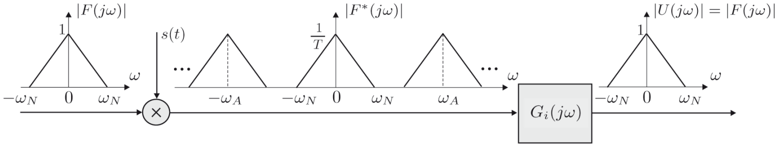


Figura 11.15 Filtragem de um sinal através de um filtro ideal.

O espectro de frequência de um filtro passa-baixas ideal é dado por

$$G_i(j\omega) = \begin{cases} T & \dfrac{-\omega_A}{2} < \omega < \dfrac{\omega_A}{2}, \\ 0 & \omega < \dfrac{-\omega_A}{2} \text{ ou } \omega > \dfrac{\omega_A}{2}. \end{cases} \tag{20}$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em (20), obtém-se

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_A/2}^{\omega_A/2} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{T}{\pi t} \frac{\left(e^{(j\pi t)/T} - e^{-(j\pi t)/T}\right)}{2j} = \frac{T}{\pi t} \text{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \\ &= \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

A função (21) representa a resposta impulsiva $g_i(t)$ do filtro ideal, cujo gráfico está desenhado na Figura 11.16.

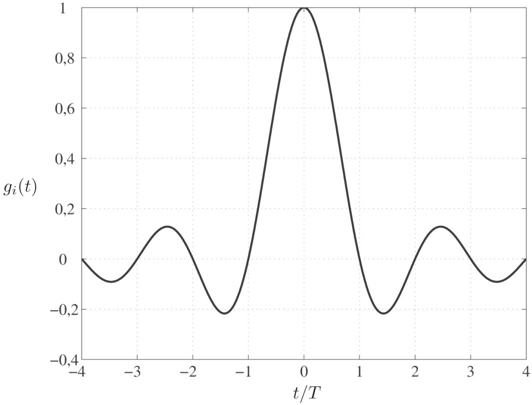


Figura 11.16 Resposta impulsiva de um filtro ideal.

Filtro ideal e segurador de ordem zero

O filtro ideal é um sistema não causal, ou seja, a entrada impulsiva aplicada em $t = 0$ fornece uma resposta que começa em $t < 0$. Por esta razão o filtro ideal não pode ser implementado na prática. A não causalidade pode ser amenizada adicionando-se um atraso ao filtro, porém esta prática deve ser evitada em sistemas de controle, pois o atraso usualmente reduz a estabilidade relativa do sistema.

Para resolver esse problema utiliza-se o segurador de ordem zero no lugar do filtro ideal. Fazendo $s = j\omega$ na função de transferência do segurador de ordem zero da Equação (19), obtém-se

$$G_{so}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega t}}{j\omega}. \tag{22}$$

A expressão (22) também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G_{so}(j\omega) &= e^{-j\omega T/2}\left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}\right)\frac{2T}{\omega T} = Te^{-j\omega T/2}\frac{2}{\omega T}\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= Te^{-j\omega T/2}\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Da expressão (23) tem-se que o módulo e a fase de $G_{so}(j\omega)$ são dados, respectivamente, por

$$|G_{so}(j\omega)| = T\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right|, \tag{24}$$

$$\angle G_{so}(j\omega) = \frac{-\omega T}{2} \quad (\pm 180^o \text{ onde a função sinc troca de sinal}). \tag{25}$$

Analisando-se a Equação (24) verifica-se que o módulo de $G_{so}(j\omega)$ é nulo nas frequências múltiplas da frequência de amostragem $\omega_A = 2\pi/T$. Na Figura 11.17 são apresentados os gráficos do módulo em função da frequência do filtro ideal e do segurador de ordem zero.

Filtro ideal e segurador de ordem zero

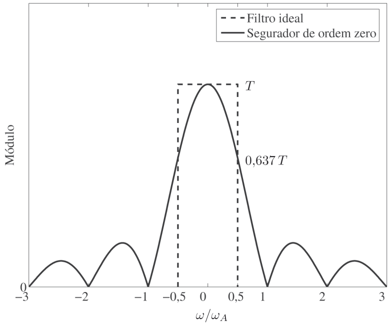


Figura 11.17 Comparação entre os módulos $|G_i(j\omega)|$ do filtro ideal e $|G_{so}(j\omega)|$ do segurador de ordem zero .

Conforme se pode perceber na Figura 11.17, o segurador de ordem zero não remove as componentes de frequência maiores que $\omega_A/2$, introduzindo assim algum *aliasing*. Quanto maior for a frequência de amostragem ω_A menor será a superposição de harmônicas que geram o *aliasing*. Na maioria dos casos práticos a resposta do segurador de ordem zero é considerada satisfatória quando a frequência de amostragem é adotada como sendo pelo menos 10 vezes maior que a componente de maior frequência presente no sinal contínuo ($\omega_A \geq 10\omega_N$).

Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. "Controle Automático", 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 11.**