EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 6.1: Sistemas de Tempo Discreto: Revisão de Função de Transferência, Resposta Impulsiva e Transformada Z inversa

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: https://cfmorais.fee.unicamp.br/

Função de Transferência

Num sistema discreto no tempo, a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$ são sequências de números, sendo portanto suscetíveis de representação por transformadas $\mathcal{Z}$. A descrição matemática fundamental de um sistema dinâmico discreto no tempo é uma equação de diferenças. No caso de ser linear e invariante no tempo ela é do tipo

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + a_{n-2}y(k+n-2) + \ldots + a_0 y(k) = \\ b_m u(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + b_{m-2}u(k+m-2) + \ldots + b_0 u(k) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo n a ordem do sistema, e a_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ e b_j $(j = 0, \ldots, m)$ constantes, com $m \leq n$ (para que o sistema seja causal, ou seja a saída não dependa de valores futuros da entrada).
Aplicando a propriedade (10.3) do avanço na equação (1), obtém-se

$$\begin{aligned} z^n Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(k) z^{n-k} + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) - a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} y(k) z^{n-1-k} + \ldots + a_0 Y(z) = \\ b_m z^m U(z) - b_m \sum_{k=0}^{m-1} u(k) z^{m-k} + b_{m-1} z^{m-1} U(z) - b_{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} u(k) z^{m-1-k} + \ldots + b_0 U(z). \end{aligned} \quad (2)$$

Função de Transferência

Supondo condições iniciais nulas

$$y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_0 = u_{m-1} = u_{m-2} = \ldots = u_0 = 0, \tag{3}$$

obtém-se

$$\left(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(z) = \left(b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0\right) U(z). \tag{4}$$

A função de transferência $G(z)$ é definida como a razão das transformadas $\mathcal{Z}$ da saída $Y(z)$ e da entrada $U(z)$ do sistema supondo condições iniciais nulas ($c.i. = 0$), ou seja,

$$G(z) \triangleq \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{c.i.=0}. \tag{5}$$

Logo, a função de transferência é dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}, \quad \text{com} \quad m \leq n. \tag{6}$$

Note que $G(z)$ independe dos sinais de entrada e saída, desde que haja condições iniciais nulas, $G(z)$ depende apenas dos parâmetros a_i (em que $i = 0, \ldots, n-1$), b_j (com $j = 0, \ldots, m$) e das ordens n e m.

Um sistema discreto, linear e invariante no tempo $G(z)$, com entrada $U(z)$ e saída $Y(z)$, é apresentado na Figura 10.6.

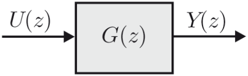

Figura 10.6 Sistema $G(z)$ com entrada $U(z)$ e saída $Y(z)$.

Função de Transferência

Assim como no caso dos sistemas contínuos, os pontos do plano z em que a função $G(z)$ tende ao infinito são os **polos** de $G(z)$. Já os pontos em que a função $G(z)$ se anula são os **zeros** de $G(z)$. No caso de $G(z)$ ser racional, como na equação (6), tem-se que

- os **polos** são as raízes do polinômio do denominador de $G(z)$, e
- os **zeros** são as raízes do polinômio do numerador de $G(z)$.

Uma outra forma equivalente de expressar a função de transferência (6) é através de potências negativas de z. Para isso basta multiplicar o numerador e o denominador da Equação (6) por z^{-n}, ou seja,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \ldots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}}, \quad \text{com} \quad m \leq n. \tag{7}$$

Álgebra de blocos

É fácil verificar que valem para as funções de transferência em z as mesmas regras de álgebra de blocos que as das funções de transferência em s.

Transformada $\mathcal{Z}$ inversa

Deseja-se determinar a sequência $f(k)$, cuja transformada $\mathcal{Z}$ é uma dada função $F(z)$. A sequência $f(k)$ é dita transformada $\mathcal{Z}$ inversa e pode ser obtida através dos seguintes métodos:

1) Expansão em série por divisão contínua

A expansão em série de potências da função $F(z)$ consiste na simples divisão contínua do polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e identificação dos coeficientes que multiplicam as diferentes potências de z.

2) Programa de computador

Consiste em determinar numericamente a sequência $f(k)$ a partir de uma equação de diferenças implementada dentro de um laço de repetição de um programa de computador. Para obter a equação de diferenças supõe-se que $F(z)$ seja uma função de transferência com entrada impulsiva e condições iniciais nulas.

3) Expansão em frações parciais
Considere a função

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)\ldots(z - p_n)}, \quad \text{com} \quad m \leq n. \tag{8}$$

O método da expansão em frações parciais consiste em expandir a função da Equação (8) em frações que podem ser facilmente identificáveis na tabela de transformadas $\mathcal{Z}$. A diferença deste método com relação aos dois anteriores é que o resultado da transformação inversa da função $F(z)$ é uma **função $f(k)$ e não uma sequência** $f(k)$.

Exemplo 10.6 (Expansão em série por divisão contínua)

Determine $f(k)$ para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ quando $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}. \tag{9}$$

Escrevendo $F(z)$ com potências negativas de z, obtém-se

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{(z-0{,}5)\,(z^2-2z+1)} \\ &= \frac{z}{z^3-2{,}5z^2+2z-0{,}5}\cdot\frac{z^{-3}}{z^{-3}} \\ &= \frac{z^{-2}}{1-2{,}5z^{-1}+2z^{-2}-0{,}5z^{-3}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Exemplo 10.6 (Expansão em série por divisão contínua)

Dividindo o numerador pelo denominador da Equação (10), obtém-se

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
z^{-2} & & & & & & \big|\ 1-2{,}5z^{-1}\ +2z^{-2}-0{,}5z^{-3} \\ \cline{7-7}
-z^{-2} & +2{,}5z^{-3} & -2z^{-4} & 0{,}5z^{-5} & & & \ z^{-2}+2{,}5z^{-3}\ +4{,}25z^{-4}+6{,}125z^{-5}+\dots \\ \cline{1-4}
 & +2{,}5z^{-3} & -2z^{-4} & 0{,}5z^{-5} & & & \\
 & -2{,}5z^{-3} & +6{,}25z^{-4} & -5z^{-5} & +1{,}25z^{-6} & & \\ \cline{2-5}
 & & +4{,}25z^{-4} & -4{,}5z^{-5} & +1{,}25z^{-6} & & \\
 & & -4{,}25z^{-4} & +10{,}625z^{-5} & -8{,}5z^{-6} & +2{,}125z^{-7} & \\ \cline{3-6}
 & & & +6{,}125z^{-5} & -7{,}25z^{-6} & +2{,}125z^{-7} &
\end{array}
$$

$$F(z) = z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + 4{,}25z^{-4} + 6{,}125z^{-5} + \dots \tag{11}$$

Logo,

$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2{,}5, \quad f(4) = 4{,}25, \quad f(5) = 6{,}125.$

Conforme se pode notar, este método fornece diretamente os elementos da série $\left(F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}\right)$ e não uma expressão geral para a sequência $f(k)$.

Exemplo 10.7 (Programa de computador)

Determine $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ quando $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0{,}5)\,(z - 1)^2}. \tag{12}$$

Supondo que $F(z)$ é a saída de um sistema com entrada impulsiva ($U(z) = 1$) e com condições iniciais nulas, então

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0{,}5)\,(z - 1)^2}\,U(z). \tag{13}$$

Escrevendo $F(z)$ em termos de potências negativas de z, obtém-se

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3}}\,U(z). \tag{14}$$

Passando o denominador multiplicando o lado esquerdo da equação,

$$F(z) - 2{,}5z^{-1}F(z) + 2z^{-2}F(z) - 0{,}5z^{-3}F(z) = z^{-2}U(z), \tag{15}$$

aplicando a propriedade do atraso, e isolando $f(k)$ obtém-se a equação de diferenças

$$f(k) = 2{,}5f(k-1) - 2f(k-2) + 0{,}5f(k-3) + u(k-2) \tag{16}$$

Exemplo 10.7 (Programa de computador)

Sabendo-se que $f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$ e que $u(k)$ é um impulso ($u(k) = \delta(k)$), os valores de $f(k)$ ($k = 0,1,2,3,\ldots$) podem ser calculados por meio de uma implementação da Equação (16) num programa de computador como o apresentado a seguir (em linguagem C).

Tabela 10.1 Programa e coeficientes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$

```
fk_1=0;
fk_2=0;
fk_3=0;
for (k=0;k<=10;k++)
{
   if (k==2) uk_2=1;
        else uk_2=0;
   fk=2.5*fk_1-2*fk_2+0.5*fk_3+uk_2;
   fk_3=fk_2;
   fk_2=fk_1;
   fk_1=fk;
}
```

k	$u(k-2)$	$f(k)$
0	0	0
1	0	0
2	1	1
3	0	2,5000
4	0	4,2500
5	0	6,1250
6	0	8,0625
7	0	10,0313
8	0	12,0156
9	0	14,0078
10	0	16,0039

Expansão em frações parciais: polos distintos

Se $F(z)$ possuir pelo menos um zero na origem ($b_0 = 0$) e apenas polos distintos, então pode-se realizar a seguinte expansão:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \ldots + \frac{a_n}{z - p_n}, \tag{17}$$

onde cada coeficiente a_i ($i = 1{,}2, \ldots, n$) pode ser calculado como

$$a_i = \left[(z - p_i) \, \frac{F(z)}{z} \right]_{z = p_i}. \tag{18}$$

Após a expansão $F(z)$ pode ser escrita como

$$F(z) = \frac{a_1 z}{z - p_1} + \frac{a_2 z}{z - p_2} + \ldots + \frac{a_n z}{z - p_n}. \tag{19}$$

Expansão em frações parciais: polos distintos

A inversa de $F(z)$ é a soma das inversas

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a_i z}{z-p_i}\right] = a_i(p_i)^k, \quad \text{com} \;\; i = 1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

A expansão de $F(z)/z$ visa apenas facilitar a identificação das frações expandidas na tabela de transformadas $\mathcal{Z}$. Caso $F(z)$ não possua pelo menos um zero na origem o método também pode ser aplicado, ou seja,

$$F(z) = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{a_n}{z-p_n}. \tag{21}$$

Pela propriedade do atraso, tem-se que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a_i}{z-p_i}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{a_i z}{z-p_i}\right] = a_i(p_i)^{k-1}, \quad \text{com} \;\; i = 1,2,\ldots,n. \tag{22}$$

Se $F(z)$ possuir polos complexos conjugados, então cada polo complexo também pode ser manipulado como sendo uma raiz distinta.

Expansão em frações parciais: polos múltiplos

Se $F(z)$ possuir um polo p com multiplicidade m, então devem ser desenvolvidas m frações associadas a p, ou seja,

$$\frac{b_1}{(z-p)^m} + \frac{b_2}{(z-p)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_m}{(z-p)}.$$

Prova-se que cada constante b_j $(j = 1,2,\ldots,m)$ pode ser calculada como

$$b_j = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{z\to p} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[(z-p)^m \frac{F(z)}{z} \right]. \tag{23}$$

A equação (23) também se aplica no caso de $F(z)$ possuir polos complexos conjugados múltiplos.

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

Determine a transformada $\mathscr{Z}$ inversa de

$$F(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}. \tag{24}$$

Note que $F(z)$ possui um zero na origem e um polo múltiplo em $z = 1$ com multiplicidade $m = 2$.

a) $F(z)/z$ pode ser expandida em frações parciais do seguinte modo:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{a_1}{z-0{,}5} + \frac{b_1}{(z-1)^2} + \frac{b_2}{z-1}, \tag{25}$$

sendo

$$a_1 = \left[(z-0{,}5)\,\frac{F(z)}{z}\right]_{z=0{,}5} = \left[(z-0{,}5)\,\frac{1}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}\right]_{z=0{,}5} = 4, \tag{26}$$

$$b_1 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\,\frac{F(z)}{z}\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\,\frac{1}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}\right] = 2, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\,\frac{F(z)}{z}\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\,\frac{1}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{-1}{(z-0{,}5)^2}\right] = -4. \end{aligned} \tag{28}$$

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

Portanto,

$$F(z) = \frac{4z}{z - 0{,}5} + \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{-4z}{z-1}. \tag{29}$$

Da tabela de transformadas $\mathscr{Z}$ obtém-se

$$f(k) = 4(0{,}5)^k + 2k - 4, \quad \text{com} \quad k = 0{,}1{,}2, \ldots \tag{30}$$

Logo,

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2{,}5, \quad f(4) = 4{,}25,$$
$$f(5) = 6{,}125, \quad f(6) = 8{,}0625, \quad f(7) = 10{,}0313,$$
$$f(8) = 12{,}0156, \quad f(9) = 14{,}0078, \quad f(10) = 16{,}0039.$$

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

b) Outro modo de obter os coeficientes da expansão $F(z)/z$ é através de uma identificação dos coeficientes do polinômio do numerador antes e depois da expansão em frações parciais. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{F(z)}{z} &= \frac{a_1}{z-0{,}5} + \frac{b_1}{(z-1)^2} + \frac{b_2}{z-1} \\ &= \frac{a_1(z-1)^2 + b_1(z-0{,}5) + b_2(z-0{,}5)(z-1)}{(z-0{,}5)(z-1)^2}\end{aligned} \tag{31}$$

Identificando $a_1(z-1)^2 + b_1(z-0{,}5) + b_2(z-0{,}5)(z-1) = 1$, ou seja,

$$z^2(a_1 + b_2) + z(-2a_1 + b_1 - 1{,}5b_2) + a_1 - 0{,}5b_1 + 0{,}5b_2 = 1. \tag{32}$$

A Equação (32) tem solução quando

$$\begin{cases} a_1 + b_2 = 0, \\ -2a_1 + b_1 - 1{,}5b_2 = 0, \\ a_1 - 0{,}5b_1 + 0{,}5b_2 = 1. \end{cases} \tag{33}$$

Resolvendo o sistema (33) obtêm-se os mesmos resultados que em (26), (27) e (28), ou seja, $a_1 = 4$, $b_1 = 2$, $b_2 = -4$.

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

c) Em vez de expandir a função $F(z)/z$ pode-se também expandir $F(z)$, isto é,

$$F(z) = \frac{a_1}{z-0{,}5} + \frac{b_1}{(z-1)^2} + \frac{b_2}{z-1} \tag{34}$$

sendo

$$a_1 = \left[(z-0{,}5)\,F(z)\right]_{z=0{,}5} = \left[(z-0{,}5)\,\frac{z}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}\right]_{z=0{,}5} = 2, \tag{35}$$

$$b_1 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\,F(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\,\frac{z}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}\right] = 2, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\,F(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\,\frac{z}{(z-0{,}5)\,(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{-0{,}5}{(z-0{,}5)^2}\right] = -2. \end{aligned} \tag{37}$$

Exemplo 10.8 (Expansão em frações parciais)

Portanto,

$$F(z) = \frac{2}{z-0{,}5} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1}. \tag{38}$$

Aplicando a propriedade do atraso na Equação (38), obtém-se a seguinte transformada $\mathscr{Z}$ inversa

$$f(k) = \begin{cases} 2(0{,}5)^{k-1} + 2(k-1) - 2 & k = 1,2,3,\ldots \\ 0 & k = 0. \end{cases} \tag{39}$$

A Equação (39) também pode ser escrita como

$$f(k) = 2(0{,}5)^{k-1}\frac{0{,}5}{0{,}5} + 2k - 4. \tag{40}$$

Logo,

$$f(k) = 4(0{,}5)^k + 2k - 4, \quad \text{com} \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{41}$$

que é igual à $f(k)$ da Equação (30).

Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. "Controle Automático", 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 10.**