EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 6.1: Sistemas de Tempo Discreto: Revisão de transformada Z e suas propriedades

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: https://cfmorais.fee.unicamp.br/

Sistemas de Tempo Discreto: Introdução

Os sinais eletrônicos podem ser divididos em dois grupos:

- **sinais de tempo contínuo:** definidos em qualquer instante pertencente ao intervalo de observação; representam-se matematicamente por funções $f(t)$, $t \in \mathcal{R}$;
- **sinais de tempo discreto ou amostrados:** definidos apenas em determinados instantes do intervalo de observação; matematicamente, se os instantes são periódicos com período de amostragem T tais sinais se representam por sequências $f(kT)$, $k = 0,1,2,3,\ldots$, $k \in \mathcal{N}$.

Sistemas de Tempo Discreto: Introdução

Os sinais de tempo discreto podem ser originalmente discretos ou resultantes da amostragem de sinais analógicos. Considere, por exemplo, o registro das variações da temperatura atmosférica ao longo de um dia. No gráfico da Figura 10.1 (a) pode-se notar que a temperatura $f(t)$ assume valores em qualquer instante ao longo das 24 horas de um dia, formando um gráfico de linha contínua ao longo do tempo t. Por outro lado, se a temperatura for anotada de hora em hora, em um processo de amostragem, o sinal $f(t)$ converte-se no sinal discreto $f(kT)$ mostrado na Figura 10.1 (b).

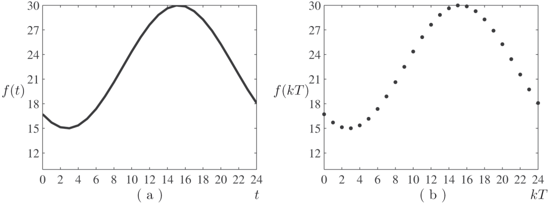

Figura 10.1 Registro de temperaturas em um dia. (a) Tempo contínuo. (b) Tempo discreto.

O sinal discreto da Figura 10.1 (b) pode, por sua vez, ser convertido num sinal digital. Os sinais digitais são resultantes da conversão da amplitude dos sinais de tempo discreto por meio de algum tipo de código binário, ou seja, usando apenas elementos 0 e 1.

Sistemas de Tempo Discreto: Introdução

A transformada $\mathcal{Z}$ é uma aplicação que faz corresponder uma função da variável complexa z a uma sequência de números. A transformada $\mathcal{Z}$ corresponde, no caso discreto, à transformada de Laplace no caso contínuo. A definição da transformada $\mathcal{Z}$ é a seguinte:

Definição 10.1

Dada uma função $f(t)$, $t \geq 0$, amostrada com período T, ou uma sequência infinita de números $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, $f(3T)$, $\ldots$, $f(kT)$, $\ldots$, a transformada $\mathcal{Z}$ é a série de potências[a]

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[f(kT)] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}, \qquad (1)$$

sendo z uma variável complexa e $k \in \mathcal{N}$.

[a] A rigor esta é a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral, que só se aplica a sequências $f(t)$ para $t \geq 0$.

Exemplo

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $f(k)$ da tabela abaixo.

k	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
$f(k)$	0	1	2	3	0	0	0	•	•	•

Solução

Aplicando a definição de transformada $\mathcal{Z}$,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots$$
$$= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3}.$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Impulso unitário

A sequência impulso unitário ou $\delta(kT)$ de Kronecker é definida como

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

O gráfico desta sequência é apresentado na Figura 10.2.

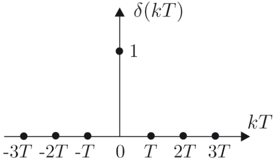

Figura 10.2 Impulso unitário.

Aplicando a definição (1) para $k \geq 0$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1. \tag{3}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Propriedade: Soma Geométrica

Quanto vale: $\sum_{k=0}^{m} b^k = ?$

$$\sum_{k=0}^{m} b^k - b\sum_{k=0}^{m} b^k = \left(1 + \cancel{b + b^2 + \cdots + b^m}\right)$$

$$- \left(\cancel{b + b^2 + \cdots + b^m} + b^{m+1}\right)$$

$$(1-b)\sum_{k=0}^{m} b^k = 1 - b^{m+1}$$

$$\sum_{k=0}^{m} b^k = \frac{1 - b^{m+1}}{1-b}$$

Propriedade: Soma Geométrica (continuação)

Quanto vale: $\sum_{k=0}^{\infty} b^k = ?$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} b^k = \lim_{m\to\infty} \frac{1-b^{m+1}}{1-b}$$

$$= \frac{1-\lim\limits_{m\to\infty} b^{m+1}}{1-b}$$

- Se $|b| > 1$ então $\lim\limits_{m\to\infty} b^{m+1} \to \infty$.
- Por outro lado, se $|b| < 1$ $\lim\limits_{m\to\infty} b^{m+1} \to 0$.

Consequentemente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b}, \qquad \text{para todo} \qquad |b| < 1$$

Degrau unitário

A sequência degrau unitário é definida como

$$f(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \tag{4}$$

O gráfico desta sequência é apresentado na Figura 10.3.

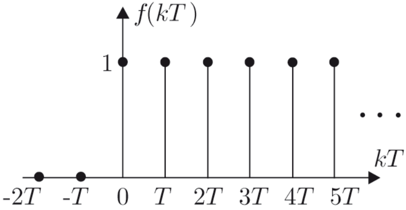

Figura 10.3 Degrau unitário.

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Degrau unitário

Aplicando a definição (1) para $k \geq 0$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \tag{5}$$

Para $|z| > 1$, a série (5) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica com razão z^{-1} e primeiro termo igual a 1. Logo,

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \tag{6}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Rampa unitária

A função rampa unitária é definida como

$$f(kT) = \begin{cases} kT & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \quad (7)$$

O gráfico desta sequência é apresentado na Figura 10.4.

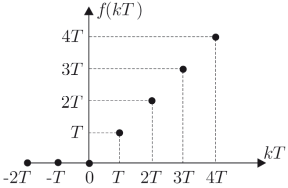

Figura 10.4 Rampa unitária.

Aplicando a definição (1) para $k \geq 0$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \cdots \quad (8)$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Rampa unitária

A expressão (8) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{F(z)}{T} &= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \cdots \\
&= z^{-1} + \left(z^{-2} + z^{-2}\right) + \left(z^{-3} + z^{-3} + z^{-3}\right) + \left(z^{-4} + z^{-4} + z^{-4} + z^{-4}\right) + \cdots \\
&= z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots + z^{-3} + z^{-4} + \cdots + z^{-4} + \cdots \\
&= z^{-1}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots\right) + z^{-2}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots\right) + z^{-3}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots\right) + \cdots \\
&= z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + z^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + z^{-3}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + z^{-4}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \cdots \\
&= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-4}}{1 - z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}}\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots\right) = \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-1}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \cdots\right) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
F(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{Tz}{z^2 - 2z + 1} \Rightarrow \mathbf{F(z)} = \frac{\mathbf{Tz}}{(\mathbf{z} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}}. \quad (10)
$$

Função exponencial

A função exponencial é dada por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Para $t = kT$ e $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções

Sequência a^k

A sequência a^k é dada por

$$f(k) = \begin{cases} a^k & k = 0,1,2,\ldots, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}. \end{aligned} \tag{14}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções (seno e cosseno)

Antes de apresentar a transformada $\mathcal{Z}$ das funções seno e cosseno, precisamos reescrevê-las usando a fórmula de Euler:

Fórmulas de Euler

$$e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsen(\omega t);$$

$$e^{-j\omega t} = cos(\omega t) - jsen(\omega t)$$

Somando as 2 equações e dividindo por 2 temos a fórmula do cosseno:

cos(ωt)

$$cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

Subtraindo as 2 equações de Euler e dividindo por 2j temos a fórmula do seno:

sen(ωt)

$$sen(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções (Função seno)

A função seno é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{15}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[\text{sen}(\omega t)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right]. \tag{16}$$

Para $t = kT$ e $k \geq 0$, de (12) tem-se que

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\left[e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z}{z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1}\right) \\ &= \frac{z\text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas funções (Função cosseno)

A função cosseno é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega T) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{18}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[\cos(\omega T)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right]. \tag{19}$$

Para $t = kT$ e $k \geq 0$, de (12) tem-se que

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z}{z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1}\right) \\ &= \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Propriedade 10.1 Linearidade

A transformada $\mathcal{Z}$ é uma aplicação linear. De fato, sendo $f(k)$ e $g(k)$ duas sequências e α e β dois números reais, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[\alpha f(k)+\beta g(k)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha f(k)+\beta g(k)\right) z^{-k} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\ &= \alpha F(z) + \beta G(z). \end{aligned} \tag{21}$$

Exemplo 10.1

Deseja-se obter a transformada $\mathcal{Z}$ da função cuja transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{a}{s(s+a)}. \tag{22}$$

Expandindo a Equação (22) em frações parciais, obtém-se

$$F(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} = \frac{As + A \cdot a + Bs}{s(s+a)} \Rightarrow A = 1, B = -1;$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}. \tag{23}$$

cuja transformada inversa é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = 1 - e^{-at}, \text{ para } t \geq 0. \tag{24}$$

Logo, a transformada $\mathcal{Z}$ de $f(t)$, amostrada com período T, é dada por

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[1 - e^{-akT}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}. \tag{25}$$

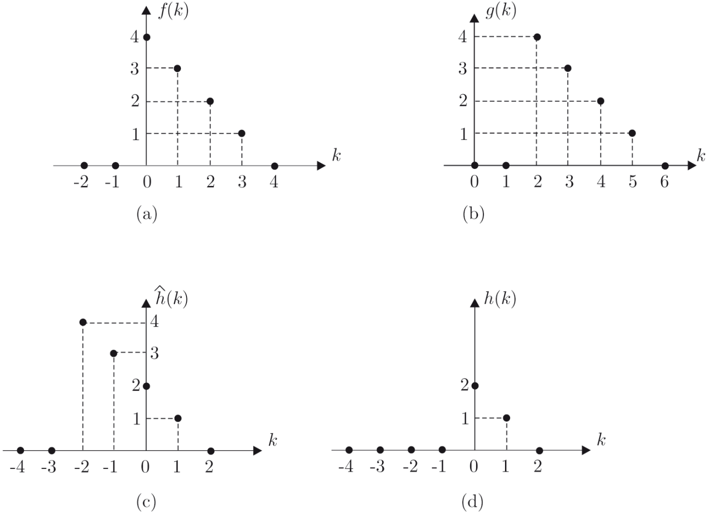

Figura 10.5 (a) Sequência $f(k)$. (b) Sequência $g(k) = f(k-2)$ com atraso de duas unidades de tempo. (c) Sequência $\hat{h}(k) = f(k+2)$ com avanço de duas unidades de tempo. (d) Sequência $h(k) = \hat{h}(k)$ para $k \geq 0$.

Propriedade 10.2 Atraso

Dadas as sequências $f(k)$ e $g(k)$, sendo a última obtida por translação da primeira para depois (Figura 10.5 (a) e 10.5 (b)), isto é,

$$g(k) = \begin{cases} f(k-n) & k \geq n, \\ 0 & k < n. \end{cases} \tag{26}$$

Então,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) z^{-k}. \tag{27}$$

Definindo $m = k - n$ e dado que $g(k) = 0$ para $k < n$, obtém-se

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-(m+n)} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} = z^{-n} F(z). \tag{28}$$

Portanto,

$$G(z) = z^{-n} F(z). \tag{29}$$

A propriedade (29) permite considerar a variável complexa z^{-n} como um operador de atraso n, aplicável às sequências temporais, que será muito útil na representação de sistemas dinâmicos.

Exemplo 10.2

Considere a sequência

$$f(k) = \begin{cases} e^{-k} & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \tag{30}$$

e a sequência $g(k)$ atrasada de duas unidades de tempo, isto é,

$$g(k) = \begin{cases} e^{-(k-2)} & k \geq 2, \\ 0 & k = 0{,}1. \end{cases} \tag{31}$$

Então,

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[f(k)\right] = \frac{z}{z - e^{-1}}. \tag{32}$$

Logo,

$$G(z) = z^{-2}F(z) = z^{-2}\frac{z}{z - e^{-1}} = \frac{1}{z(z - e^{-1})}. \tag{33}$$

Propriedade 10.3 Avanço

Dada a sequências $f(k)$ e seja $\hat{h}(k)$ obtida por translação de $f(k)$ para antes (Figura 10.5 (a) e 10.5 (c)), isto é,

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} f(k+n) & k \geq -n, \\ 0 & k < -n. \end{cases} \tag{34}$$

Como a definição da transformada $\mathcal{Z}$ não admite termos da sequência com índice $k < 0$, é necessário truncar $\hat{h}(k)$, obtendo-se a sequência truncada $h(k)$ da Figura 10.5 (d), dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k+n) & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Assim,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n) z^{-k}.$$

Propriedade 10.3 Avanço

Definindo $m = k + n$, então

$$H(z) = \sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-(m-n)} = z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right). \tag{36}$$

Portanto,

$$H(z) = z^n \left(F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right). \tag{37}$$

A propriedade (37) permite considerar a variável complexa z^n como um operador de avanço n, aplicável às sequências temporais com a devida atenção ao truncamento.

Exemplo 10.3

Considere as sequências $h(k) = k + 2$ e $f(k) = k$. Então,

$$F(z) = \mathscr{Z}\left[f(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^2}. \tag{38}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H(z) &= z^2 \left(F(z) - \sum_{m=0}^{1} m z^{-m} \right) \\ &= z^2 \left(\frac{z}{(z-1)^2} - z^{-1} \right) \\ &= \frac{z^3}{(z-1)^2} - z = \frac{2z^2 - z}{(z-1)^2}. \end{aligned} \tag{39}$$

10.2.3 Teorema do valor inicial

Seja $F(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de uma função $f(t)$, então o valor inicial $f(0)$ de $f(t)$ é dado por

$$f(0) = \lim_{k \to 0} f(k) = \lim_{z \to \infty} F(z). \tag{40}$$

De fato,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots \tag{41}$$

Fazendo $z \to \infty$ na Equação (41), obtém-se o valor inicial $f(0)$.

Exemplo 10.4

Determine o valor inicial de uma função $f(k)$, cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$F(z) = \frac{z}{z-a}. \tag{42}$$

Pelo teorema do valor inicial

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-a} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1. \tag{43}$$

De fato,

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[a^k\right] \Rightarrow f(k) = a^k \Rightarrow f(0) = 1. \tag{44}$$

10.2.4 Teorema do valor final

Supondo que $f(k) = 0$ para $k < 0$ e que existe

$$\lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z),$$

então o valor final de $f(k)$ é dado por

$$\lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z). \tag{45}$$

Para demonstrar este teorema, basta considerar que

$$\mathcal{Z}\left[f(k)\right] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \tag{46}$$

$$\mathcal{Z}\left[f(k-1)\right] = z^{-1} F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1) z^{-k} \tag{47}$$

10.2.4 Teorema do valor final

Subtraindo a Equação (46) da (47) e calculando $\lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z) &= \lim_{z \to 1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(f(k) - f(k-1)\right) z^{-k} \right] \\ &= [f(0) - f(-1)] + [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \cdots \\ &= f(\infty) = \lim_{k \to \infty} f(k). \end{aligned} \tag{48}$$

Exemplo 10.5

Determine o valor final de uma função $f(k)$, cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$F(z) = \frac{(1-e^{-a})z}{(z-1)(z-e^{-a})}. \tag{49}$$

Pelo teorema do valor final

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)F(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z}\frac{(1-e^{-a})z}{(z-1)(z-e^{-a})} = 1. \tag{50}$$

De fato,

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[1-e^{-ak}\right] \Rightarrow f(k) = 1-e^{-ak} \Rightarrow f(\infty) = 1. \tag{51}$$

Atividade

Um sistema dinâmico é descrito pela equação de diferenças

$$y(k+2)-y(k+1)+0{,}09y(k) = u(k), \text{ com } y(0) = y(1) = 0. \quad (52)$$

Supondo que $u(k)$ é um degrau unitário determine:
a) a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y(k)$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$.

Dica: Na letra (a) aplique a propriedade (37) do avanço e lembre-se que como $u(k)$ é um degrau unitário, então $\mathcal{Z}\left[u(k)\right] = \dfrac{z}{z-1}$.
Na letra (b) aplique o teorema do valor final (45) no resultado da letra (a).

Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. "Controle Automático", 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 10.**