

EA721 - Princípios de Controle e
Servomecanismo
Parte 5.3: Projeto de sistemas de controle
no espaço de estados:
Observadores de estado

Professora: Cecília de Freitas Moraes
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Introdução

- Na abordagem por alocação de polos no projeto de sistemas de controle, supomos que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação.
- Na prática, contudo, nem todas as variáveis estão disponíveis para realimentação. Então, precisamos estimar as variáveis de estado não disponíveis.
- A estimativa de variáveis de estado não mensuráveis é comumente denominada observação.
- Um dispositivo (ou programa de computador) que estima ou observa as variáveis de estado é denominado observador de estado ou simplesmente observador.
- Se o observador de estado observa todas as variáveis do sistema, independentemente de algumas das variáveis de estado estarem disponíveis para medição direta, ele é denominado **observador de estado de ordem plena**.

Introdução

- Haverá vezes em que isso não será necessário, quando necessitarmos da observação somente das variáveis de estado não mensuráveis, e não das variáveis que são diretamente mensuráveis. Por exemplo, como as variáveis de saída são observáveis e são linearmente relacionadas com as variáveis de estado, não precisamos observar todas as variáveis de estado, mas somente $n - m$ dessas variáveis, onde n é a dimensão do vetor de estado e m é a dimensão do vetor de saída.
- Um observador que estima menos que n variáveis de estado, onde n é a dimensão do vetor de estado, é denominado **observador de estado de ordem reduzida** ou, simplesmente, **observador de ordem reduzida**.
- Se a ordem do observador de estado de ordem reduzida for a menor possível, o observador será denominado observador de estado de ordem mínima ou observador de ordem mínima.
- Neste tópico da disciplina será investigado o projeto de observadores de estados de ordem plena e reduzida.

Observadores de ordem plena

Observador de estado

Um observador de estado estima as variáveis de estado baseado nas medidas das variáveis de saída e das variáveis de controle. Aqui, o conceito de observabilidade, discutido anteriormente, tem um papel importante. Como será visto mais tarde, observadores de estado podem ser projetados se, e somente se, a condição de observabilidade for satisfeita.

Nas discussões seguintes sobre observadores de estado, utilizaremos a notação $\tilde{\mathbf{x}}$ para representar o vetor de estado observado. Em muitos casos práticos, o vetor de estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$ é utilizado na realimentação de estado para gerar o vetor de controle desejado. Considere a planta definida por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (1)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2)$$

Observador de estado

O observador é um subsistema reconstrutor do vetor de estado da planta. O modelo matemático do observador é basicamente o mesmo que o da planta, exceto por um termo adicional que incorpora o erro de estimação para compensar as incertezas nas matrizes **A** e **B** e a ausência do erro inicial. O erro de estimação ou erro de observação é a diferença entre a saída medida e a saída estimada. O erro inicial é a diferença entre o estado inicial e o estado inicial estimado. Portanto, definimos o modelo matemático do observador como

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_ey \quad (3)$$

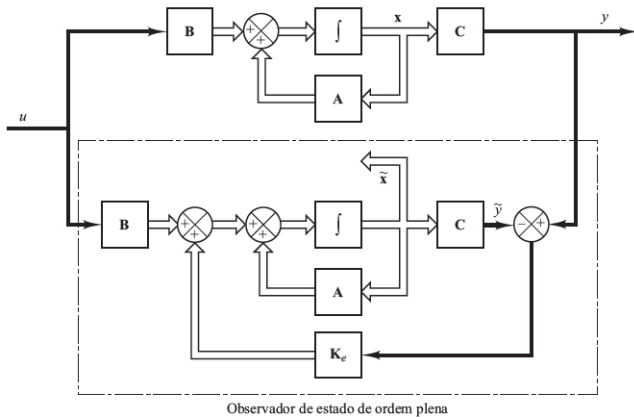
onde $\tilde{\mathbf{x}}$ é o estado estimado e $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$ é a saída estimada. As entradas do observador são a saída y e a entrada de controle u . A matriz \mathbf{K}_e , denominada matriz de ganho do observador, é uma matriz de penalização do termo de correção que envolve a diferença entre a saída medida y e a saída estimada $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$. Esse termo corrige continuamente a saída do modelo e aumenta o desempenho do observador.

Observador de estado

A Figura 10.11 mostra o diagrama de blocos do sistema e o observador de estado de ordem plena.

FIGURA 10.11

Diagrama de blocos do sistema e do observador de estado de ordem plena, quando a entrada u e a saída y são escalares.



Observador de estado de ordem plena

A ordem do observador de estado que será discutida aqui é a mesma da planta. Suponha que a planta seja definida pelas equações (1) e (2) e que o modelo do observador seja definido pela Equação (3). Para obter a equação do erro de observação, vamos subtrair a Equação (3) a partir da Equação (1):

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

Defina a diferença entre \mathbf{x} e $\tilde{\mathbf{x}}$ como o vetor de erro \mathbf{e} , ou

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

Então, a Equação (4) torna-se:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (5)$$

Observador de estado de ordem plena

A partir da Equação (5), notamos que o comportamento dinâmico do vetor de erro é determinado pelos autovalores da matriz

$$\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}.$$

Se essa matriz for estável, o vetor de erro convergirá para zero, qualquer que seja o vetor de erro inicial $\mathbf{e}(0)$. Ou seja, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ convergirá para $\mathbf{x}(t)$ independentemente do valor de $\mathbf{x}(0)$ e $\tilde{\mathbf{x}}(0)$.

Se os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ forem escolhidos de tal maneira que o comportamento dinâmico do vetor de erro seja assintoticamente estável e adequadamente rápido, então qualquer vetor de erro tenderá a zero (a origem) com uma velocidade adequada.

Se a planta for completamente observável, então será provado que é possível escolher a matriz \mathbf{K}_e tal que $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ tenha seus autovalores arbitrariamente escolhidos. Ou seja, a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador pode ser determinada para fornecer a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ desejada. Discutiremos esse assunto a seguir.

O problema dual

O problema de projetar um observador de ordem plena resulta na determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador, tal que as dinâmicas do erro definido pela Equação (5) sejam assintoticamente estáveis, com uma velocidade suficiente de resposta.¹ Consequentemente, o projeto do observador de ordem plena resulta na determinação de uma matriz \mathbf{K}_e apropriada tal que $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ possua os autovalores desejados.

Assim, o problema aqui resulta no mesmo que o problema de alocação de polos, que discutimos anteriormente. De fato, os problemas são matematicamente os mesmos. Essa propriedade é denominada **dualidade**.

Considere o sistema definido por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

¹A estabilidade assintótica e a velocidade de resposta das dinâmicas do erro são determinadas pelos autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$.

O problema dual

No projeto do observador de estado de ordem plena, podemos resolver o problema dual, ou seja, resolver o problema de alocação de polos para o sistema dual:²

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{C}'\nu \\ n &= \mathbf{B}'\mathbf{z}\end{aligned}$$

considerando o sinal de controle ν como

$$\nu = -\mathbf{K}\mathbf{z}$$

Se o sistema dual for de estado completamente controlável, então a matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado poderá ser determinada de tal forma que a matriz $\mathbf{A}' - \mathbf{C}'\mathbf{K}$ fornecerá o conjunto dos autovalores desejados. Se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ forem os autovalores desejados da matriz do observador de estado, então, tomando-se os mesmos μ como os autovalores desejados da matriz de ganho de realimentação de estado do sistema dual, obteremos:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}' - \mathbf{C}'\mathbf{K})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

²O símbolo ' representa transposição de matriz ou vetor (linhas convertidas em colunas e colunas convertidas em linhas).

O problema dual

Sabendo que os autovalores de $\mathbf{A}' - \mathbf{C}'\mathbf{K}$ e os de sua transpostas $\mathbf{A} - \mathbf{K}'\mathbf{C}$ são os mesmos, temos:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}' - \mathbf{C}'\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}'\mathbf{C})|$$

Comparando o polinômio característico $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}'\mathbf{C})|$ com o polinômio característico para o sistema observador $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})|$ (recorra à Equação (3)), descobrimos que \mathbf{K}_e e \mathbf{K}' são relacionados por

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}'$$

Assim, utilizando a matriz \mathbf{K} determinada pela abordagem de alocação de polos no sistema dual, a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador do sistema original pode ser determinada utilizando-se a relação $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}'$.

Condição necessária e suficiente para observação de estado

Como foi discutido, uma condição necessária e suficiente para a determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador, na determinação dos autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$, mostra que o dual do sistema original

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{C}'\nu$$

é de estado completamente controlável. A condição de controlabilidade completa de estado para esse sistema com dualidade é que o posto de

$$\left[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid \cdots \mid (\mathbf{A}')^{n-1}\mathbf{C}' \right] = (\text{Obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C}))'$$

seja n . Esta é a condição de observabilidade completa do sistema original definido pelas equações (1) e (2). Isso significa que uma condição necessária e suficiente para a observação do estado do sistema definido pelas equações (1) e (2) mostra que o sistema é completamente **observável**.

Condição necessária e suficiente para observação de estado

Uma vez que tenhamos selecionado os autovalores desejados (ou a equação característica desejada), o observador de estado de ordem plena poderá ser projetado, desde que a planta seja completamente observável.

Os autovalores desejados da equação característica devem ser escolhidos de modo que o observador de estado responda, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápido que o sistema de malha fechada considerado.

Como foi estabelecido anteriormente, a equação do observador de estado de ordem plena é:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

Note que até agora estivemos supondo que as matrizes **A**, **B** e **C** do observador são exatamente as mesmas da planta física. Se existirem discrepâncias entre as matrizes **A**, **B** e **C** do observador e da planta, as dinâmicas do erro do observador não serão mais governadas pela Equação (5). Isso significa que o erro pode não tender a zero, como esperado. Portanto, precisamos escolher **K_e** tal que o observador seja estável e o erro permaneça aceitavelmente pequeno na presença de pequenos erros de modelagem.

Método da matriz de transformação para obtenção do ganho \mathbf{K}_e

Seguindo a mesma abordagem que utilizamos na determinação da equação da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado, podemos obter as seguintes equações:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde \mathbf{K}_e é uma matriz $n \times 1$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1}$$

e

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid \dots \mid (\mathbf{A}')^{n-1}\mathbf{C}'] = (\text{Obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C}))'$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de substituição direta para obtenção do ganho \mathbf{K}_e

Da mesma maneira que o caso de alocação de polos, se o sistema for de ordem reduzida, então a substituição direta da matriz \mathbf{K}_e no polinômio característico desejado poderá ser mais simples. Por exemplo, se \mathbf{x} for um vetor de dimensão 3, então escreva a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador como:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix}$$

Substitua essa matriz \mathbf{K}_e no polinômio característico desejado:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em s , em ambos os lados dessa última equação, podemos determinar os valores de k_{e1} , k_{e2} e k_{e3} . Essa abordagem será conveniente se $n = 1, 2$ ou 3 , onde n é a dimensão do vetor de estado \mathbf{x} . (Embora essa abordagem possa ser utilizada quando $n = 4, 5, 6, \dots$, os cálculos envolvidos poderão se tornar muito tediosos.) Outra abordagem para a determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador de estado refere-se ao uso da fórmula de Ackermann apresentada a seguir.

Fórmula de Ackermann para obtenção do ganho \mathbf{K}_e

Considere o sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (7)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (8)$$

Na alocação de polos, obtivemos a fórmula de Ackermann para o problema de alocação de polos do sistema definido pela Equação (7). O resultado foi dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \Phi(\mathbf{A})$$

Para o dual do sistema definido pelas equações (7) e (8),

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{C}'v$$

$$n = \mathbf{B}'\mathbf{z}$$

a fórmula de Ackermann precedente para a alocação de polos é modificada para

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid \dots \mid \mathbf{A}'^{n-1}\mathbf{C}']^{-1} \Phi(\mathbf{A}') \quad (9)$$

Fórmula de Ackermann para obtenção do ganho \mathbf{K}_e

Como foi estabelecido anteriormente, a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador de estado é dada por \mathbf{K}' , sendo \mathbf{K} dada pela Equação (9). Assim,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}' = \Phi(\mathbf{A}')' \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde $\Phi(s)$ é o polinômio característico desejado do observador de estado, ou

$$\Phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

onde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ são os autovalores desejados. A Equação (10) é denominada fórmula de Ackermann da determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador.

Comentários sobre a seleção da melhor \mathbf{K}_e

- Com relação à Figura 10.11 (slide 6), note que o sinal de realimentação que passa pela matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador serve como um sinal de correção do modelo da planta, fazendo que incertezas da planta sejam levadas em consideração.
- Se incertezas significativas estiverem envolvidas, o sinal de realimentação que passa pela matriz \mathbf{K}_e precisará ser relativamente grande.
- Contudo, se a saída do sinal estiver significativamente contaminada por distúrbios e ruídos de medida, então a saída y não é confiável e o sinal de realimentação que passa pela matriz \mathbf{K}_e deverá ser relativamente pequeno.
- Na determinação da matriz \mathbf{K}_e , devemos examinar cuidadosamente os efeitos dos distúrbios e dos ruídos de medida relacionados com a saída y .

Comentários sobre a seleção da melhor \mathbf{K}_e

- Lembre-se de que a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador depende da equação característica desejada

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = 0$$

A escolha de um conjunto $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, em muitos exemplos, não é única. Como regra, contudo, os polos do observador devem ser de duas a cinco vezes mais rápidos que os polos do controlador, para garantir que o erro de observação (erro de estimação) convirja rapidamente para zero.

- Isso significa que o erro de estimativa do observador decai de duas a cinco vezes mais rápido que o vetor de estado \mathbf{x} .
- Essa redução mais rápida do erro do observador, comparada com as dinâmicas desejadas, faz os polos do controlador serem dominantes na resposta do sistema.

Comentários sobre a seleção da melhor \mathbf{K}_e

- É importante notar que, se o ruído do sensor for considerável, poderemos escolher os polos do observador mais lentos que duas vezes a velocidade dos polos do controlador, tal que a banda passante do sistema se torne menor e filtre o ruído.
- Nesse caso, a resposta do sistema será fortemente influenciada pelos polos do observador. Se estes estiverem localizados à direita dos polos do controlador, no lado esquerdo do plano s , a resposta do sistema será dominada pelos polos do observador em vez de pelos polos do controle.
- No projeto de observadores de estado, é aconselhável determinar várias matrizes de ganho \mathbf{K}_e do observador, baseadas em diferentes equações características desejadas.
- Para cada uma das diferentes matrizes \mathbf{K}_e , deve-se realizar simulações para determinar o desempenho do sistema resultante. Seleccionamos, então, a melhor \mathbf{K}_e do ponto de vista do desempenho do sistema global.
- Em vários casos práticos, a seleção da melhor matriz \mathbf{K}_e se resume a um compromisso entre velocidade de resposta e sensibilidade aos distúrbios e ruídos.

Exemplo 10.6

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

Utilizamos a realimentação por estado observado, tal que

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

Projete um observador de ordem plena, supondo que a configuração do sistema seja idêntica àquela mostrada na Figura 10.11. Considere que os autovalores desejados da matriz do observador sejam $\mu_1 = -10$, $\mu_2 = -10$. O projeto do observador de estado se reduz à determinação de uma matriz apropriada de ganho \mathbf{K}_e do observador.

Solução: Vamos examinar a matriz de observabilidade. O posto de

$$[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é 2. Por consequência, o sistema é completamente observável, e a determinação da matriz de ganho do observador é possível. Resolveremos esse problema por três métodos.

Exemplo 10.6: Método 1

Determinaremos a matriz de ganho do observador com a utilização da Equação (6). O sistema dado já está na forma canônica observável. Assim, a matriz de transformação $\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1}$ é \mathbf{I} . Como a equação característica do sistema dado é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

temos:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -20,6$$

A equação característica desejada é:

$$(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2 = 0$$

Logo,

$$\alpha_1 = 20, \quad \alpha_2 = 100$$

Então, a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador pode ser obtida a partir da Equação (6), como segue:

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{W}\mathbf{N})^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 + 20,6 \\ 20 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.6: Método 2

Com relação à Equação (5):

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}$$

a equação característica do observador resulta em:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0$$

Defina:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix}$$

Então, a equação característica resulta em:

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= \left| \begin{bmatrix} s & -20,6 + k_{e1} \\ -1 & s + k_{e2} \end{bmatrix} \right| \\ &= s^2 + k_{e2}s - 20,6 + k_{e1} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Exemplo 10.6: Método 2

Como a equação característica desejada é:

$$s^2 + 20s + 100 = 0$$

comparando a Equação (11) com essa última equação, obtemos:

$$k_{e1} = 120,6, \quad k_{e2} = 20$$

ou

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 120,6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.6: Método 3

Utilizaremos a fórmula de Ackermann dada pela Equação (10):

$$\mathbf{K}_e = \Phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\Phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 20s + 100$$

Logo,

$$\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 100\mathbf{I}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= (\mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 100\mathbf{I}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 20,6 & 0 \\ 0 & 20,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 412 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 120,6 & 412 \\ 20 & 120,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,6 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

Exemplo 10.6: Método 3

Como era de esperar, obtivemos a mesma matriz \mathbf{K}_e , independentemente do método empregado. A equação do observador de estado de ordem plena é dada pela Equação (3),

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120,6 \\ 20 \end{bmatrix} y$$

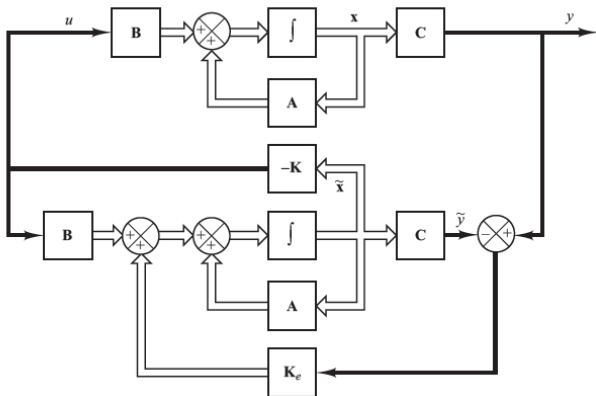
Por fim, note que, similarmente ao caso de alocação de polos, se a ordem n do sistema for 4 ou maior, os métodos 1 e 3 serão recomendados, uma vez que todas as manipulações computacionais podem ser conduzidas por um computador, enquanto o método 2 sempre requer cálculos manuais de uma equação característica que envolve parâmetros desconhecidos k_{e1} , k_{e2} , \dots , k_{en} .

Princípio da Separação

No processo de projeto por alocação de polos, vamos supor que o estado real $\mathbf{x}(t)$ estava disponível para fins de realimentação. Na prática, contudo, o estado real $\mathbf{x}(t)$ pode não ser mensurável, de modo que seja preciso projetar um observador e utilizar o estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ na realimentação, como mostra a Figura 10.12.

FIGURA 10.12

Sistema de controle realimentado por estado observado.



Princípio da Separação

O processo de projeto, portanto, passa a ter dois estágios, sendo que:

- o primeiro consiste na determinação da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação que produzirá a equação característica desejada,
- e o segundo consiste na determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador que produzirá a equação característica do observador desejada.

Vamos agora investigar o efeito do uso do estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, em vez do uso do estado real $\mathbf{x}(t)$, na equação característica de um sistema de controle de malha fechada.

Princípio da Separação

Considere o sistema de estado completamente controlável e observável, definido pelas equações:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Para o controle por realimentação de estado baseado no estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$,

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

Com esse controle, a equação de estado resulta em:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (13)$$

A diferença entre o estado real $\mathbf{x}(t)$ e o estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ foi definido como o erro $\mathbf{e}(t)$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

A substituição do vetor de erro $\mathbf{e}(t)$ na Equação (13) fornece:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}\mathbf{e} \quad (14)$$

Princípio da Separação

Note que a equação do erro do observador foi dada pela Equação (5), repetida aqui:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e} \quad (15)$$

Combinando as equações (14) e (15), obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (16)$$

A Equação (16) descreve as dinâmicas do sistema de controle realimentado por estado observado. A equação característica do sistema é:

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0$$

Princípio da Separação

- Note que os polos de malha fechada do sistema de controle realimentado por estado observado consistem nos polos decorrentes do projeto por alocação de polos e dos polos decorrentes do projeto isolado do observador.
- Isso significa que o projeto da alocação de polos e o projeto do observador são independentes entre si. Eles podem ser conduzidos separadamente e combinados para formar o sistema de controle realimentado por estado observado. Essa propriedade é chamada de **Princípio da Separação**.
- Observe que, se a ordem da planta for n , então o observador também será de enésima ordem (se o observador de estado de ordem plena for usado), e a equação característica resultante do sistema de malha fechada global se tornará de ordem $2n$.

Função de transferência do controlador baseado em observador

Considere a planta definida por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Suponha que a planta seja completamente observável. Considere que é utilizado um controle do tipo realimentação de estado observado $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$. Então, as equações do observador são dadas por:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y \quad (17)$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \quad (18)$$

uma vez que a Equação (17) é obtida pela substituição de $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ na Equação (3).

Considerando a transformada de Laplace da Equação (17), ao supor uma condição inicial nula e resolvendo para $\tilde{\mathbf{X}}(s)$, obtemos:

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e Y(s)$$

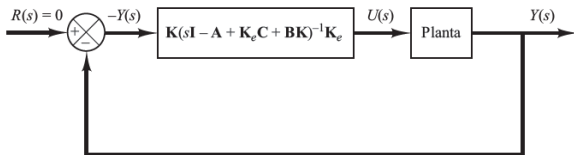
Função de transferência do controlador baseado em observador

Então, a função de transferência do controlador observador $U(s)/Y(s)$ pode ser obtida como:

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e$$

A Figura 10.13 mostra a representação por diagrama de blocos do sistema.

FIGURA 10.13
Representação
por diagrama
de blocos do
sistema com
um controlador-
observador.



Função de transferência do controlador baseado em observador

Note que a função de transferência

$$\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e$$

age como um controlador do sistema. Por isso, denominamos a função de transferência

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e \quad (19)$$

do controlador baseado em observador ou, simplesmente, função de transferência do controlador observador.

Note que a matriz do controlador-observador

$$\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}$$

pode ser estável ou não, embora $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ sejam escolhidas para serem estáveis. De fato, em alguns casos, a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}$ pode ser pouco estável ou mesmo instável.

Exemplo 10.7

Considere o projeto de um sistema regulador para a seguinte planta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (20)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (21)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Suponha que se utilize a abordagem por alocação de polos para projetar o sistema de controle e que os polos desejados de malha fechada para esse sistema estejam em $\mu_1 = -1,8 + j2,4$ e $\mu_2 = -1,8 - j2,4$. A matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado, nesse caso, resulta em:

$$\mathbf{K} = [29,6 \quad 3,6]$$

Utilizando essa matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado, o sinal de controle u fica definido por:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[29,6 \quad 3,6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.7

Suponha que se utilize um controle por realimentação do estado observado em vez do controle por realimentação do estado real, ou

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

e escolhemos os polos do observador para estar em $s_1 = s_2 = -8$. Obtenha a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador e desenhe um diagrama de blocos para o sistema de controle realimentado por meio do estado observado. Então, obtenha a função de transferência $U(s)/[-Y(s)]$ do controlador-observador e desenhe outro diagrama de blocos com o controlador-observador como um controlador em série no ramo direto. Por fim, obtenha a resposta do sistema às seguintes condições iniciais:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.7

Solução: Para o sistema definido pela Equação (20), o polinômio característico é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = s^2 + a_1s + a_2$$

Assim,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -20,6$$

O polinômio característico desejado do observador é:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2$$

Consequentemente,

$$\alpha_1 = 16, \quad \alpha_2 = 64$$

Exemplo 10.7

Para a determinação da matriz de ganho do observador, utilizamos a seguinte equação:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ou

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.7

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_e &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20,6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (23)$$

A Equação (23) fornece a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador. A equação do observador é dada por:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_ey \quad (24)$$

Como

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

a Equação (24) resulta em:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_ey$$

ou

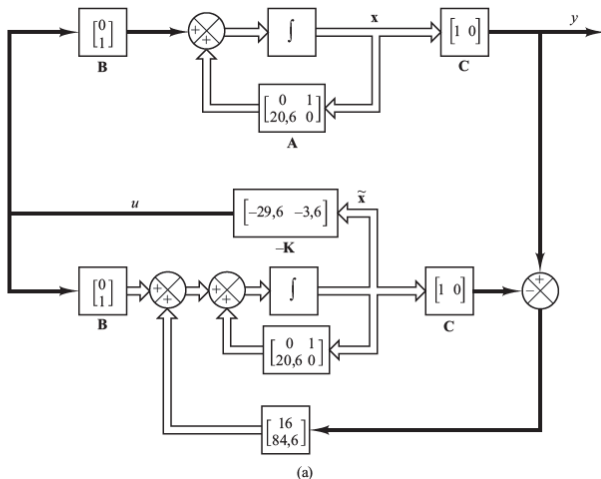
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93,6 & -3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y\end{aligned}$$

Exemplo 10.7

O diagrama de blocos do sistema realimentado por meio do estado observado é mostrado na Figura 10.14(a).

FIGURA 10.14

(a) Diagrama de blocos do sistema realimentado por meio do estado observado;
(b) diagrama de blocos da função de transferência do sistema.



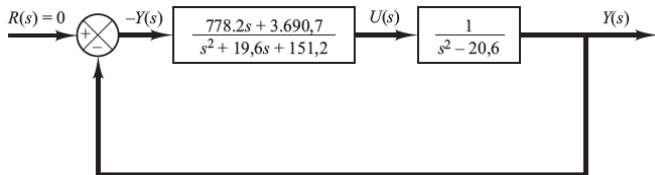
Exemplo 10.7

Com relação à Equação (19), a função de transferência do controlador-observador é:

$$\begin{aligned}\frac{U(s)}{-Y(s)} &= \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e \\ &= [29,6 \quad 3,6] \begin{bmatrix} s + 16 & -1 \\ 93,6 & s + 3,6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{778,2s + 3.690,7}{s^2 + 19,6s + 151,2}\end{aligned}$$

A Figura 10.14(b) mostra um diagrama de blocos do sistema.

FIGURA 10.14
(b) diagrama de blocos da função de transferência do sistema.



(b)

Exemplo 10.7

A dinâmica do sistema de controle realimentado por meio do estado observado projetado anteriormente pode ser descrita pelas seguintes equações. Para a planta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para o observador,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93,6 & -3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y$$
$$u = - \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.7

O sistema, como um todo, é de quarta ordem. A equação característica do sistema é:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| &= (s^2 + 3,6s + 9)(s^2 + 16s + 64) \\ &= s^4 + 19,6s^3 + 130,6s^2 + 374,4s + 576 = 0 \end{aligned}$$

A equação característica também pode ser obtida a partir do diagrama de blocos do sistema mostrado na Figura 10.14(b). Uma vez que a função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778,2s + 3.690,7}{(s^2 + 19,6s + 151,2)(s^2 - 20,6) + 778,2s + 3.690,7}$$

a equação característica é:

$$\begin{aligned} (s^2 + 19,6s + 151,2)(s^2 - 20,6) + 778,2s + 3.690,7 \\ = s^4 + 19,6s^3 + 130,6s^2 + 374,4s + 576 = 0 \end{aligned}$$

Naturalmente, a equação característica do sistema é a mesma, tanto para a representação no espaço de estados como para a representação por função de transferência.

Exemplo 10.7

Por fim, obteremos a resposta do sistema à seguinte condição inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com relação à Equação (16), a resposta à condição inicial pode ser determinada a partir de

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.7

Um programa em MATLAB que permite obter a resposta é mostrado no Programa 10.9 em MATLAB.

Programa 10.9 em MATLAB

```
A = [0 1; 20.6 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
K = [29.6 3.6];
Ke = [16; 84.6];
sys = ss([A-B*K B*K; zeros(2,2) A-Ke*C],eye(4),eye(4),eye(4));
t = 0:0.01:4;
z = initial(sys,[1;0;0.5;0],t);
x1 = [1 0 0 0]*z';
x2 = [0 1 0 0]*z';
e1 = [0 0 1 0]*z';
e2 = [0 0 0 1]*z';

subplot(2,2,1); plot(t,x1),grid
title('Resposta à condição inicial')
ylabel('variável de estado x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2),grid
title('Resposta à condição inicial')
ylabel('variável de estado x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e1),grid
xlabel('t (s)'), ylabel('variável de estado de erro e1')

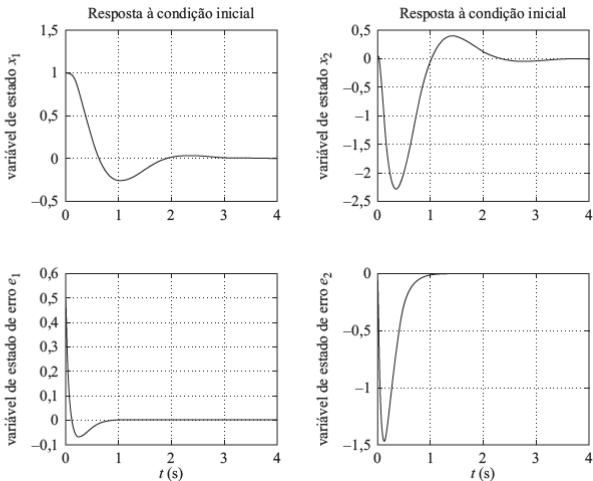
subplot(2,2,4); plot(t,e2),grid
xlabel('t (s)'), ylabel('variável de estado de erro e2')
```

Exemplo 10.7

As curvas de resposta resultantes são mostradas na Figura 10.15.

FIGURA 10.15

Curvas de resposta à condição inicial.



Observadores de ordem mínima

Observador de ordem mínima

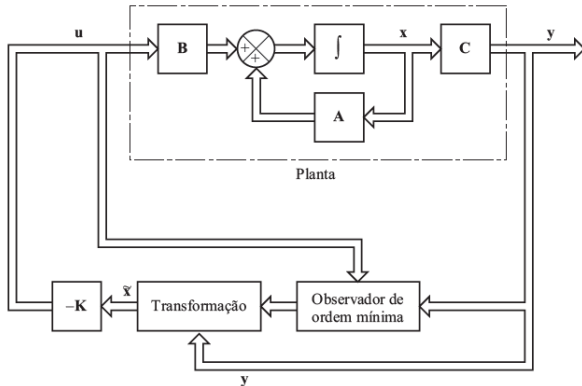
- Os observadores discutidos até agora são projetados para reconstruir todas as variáveis de estado.
- Na prática, algumas das variáveis de estado podem ser precisamente medidas e não necessitam ser estimadas.
- Suponha que o vetor de estado \mathbf{x} seja um vetor de dimensão n e que a saída seja um vetor y de dimensão m que pode ser medido. Como as m variáveis de saída são combinações lineares das variáveis de estado, então m variáveis de estado não precisam ser estimadas. Precisamos estimar apenas $n - m$ variáveis de estado. Então, o observador de ordem reduzida se torna um observador de ordem $(n - m)$.
- Esse observador de ordem $(n - m)$ é um observador de ordem mínima.
- É importante notar, contudo, que, se a medida das variáveis de saída envolve ruídos significativos e é relativamente imprecisa, então o uso de observadores de ordem plena poderá resultar em um desempenho melhor.

Observador de ordem mínima

A Figura 10.16 mostra o diagrama de blocos de um sistema com um observador de ordem mínima.

FIGURA 10.16

Sistema de controle realimentado por estado observado com um observador de ordem mínima.



Observador de ordem mínima

Para apresentar a ideia básica do observador de ordem mínima, sem complicações matemáticas desnecessárias, mostraremos o caso em que a saída é um escalar (ou seja, $m = 1$) e obteremos as equações de estado do observador de ordem mínima. Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (25)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (26)$$

onde o vetor de estado \mathbf{x} pode ser dividido em duas partes x_a (um escalar) e \mathbf{x}_b [um vetor de dimensão $(n-1)$]. Aqui, a variável de estado x_a é igual à saída y e, portanto, pode ser diretamente medida, enquanto \mathbf{x}_b é a porção não mensurável do vetor de estado. Desse modo, a equação de estado particionado e a de saída resultam em:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \hline \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_a \\ \mathbf{B}_b \end{array} \right] u \quad (27)$$

$$y = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \quad (28)$$

onde A_{aa} = escalar; A_{ab} = matriz $1 \times (n-1)$; A_{ba} = matriz $(n-1) \times 1$; A_{bb} = matriz $(n-1) \times (n-1)$; B_a = escalar; B_b = matriz $(n-1) \times 1$.

Observador de ordem mínima

A partir da Equação (27), a equação da porção mensurável do estado resulta em:

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u$$

ou

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \quad (29)$$

Os termos do lado esquerdo da Equação (29) podem ser medidos. Essa equação age como a equação de saída. No projeto de observadores de ordem mínima, consideramos o lado esquerdo dessa equação como quantidades conhecidas. Assim, a equação (29) relaciona quantidades mensuráveis e não mensuráveis de estado.

Da Equação (27), a equação da porção não mensurável do estado resulta em:

$$\dot{x}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u \quad (30)$$

Sabendo que os termos $\mathbf{A}_{ba}x_a$ e $\mathbf{B}_b u$ são quantidades conhecidas, a Equação (30) descreve as dinâmicas da porção não mensurável do estado.

A seguir, apresentaremos um método para a determinação do observador de ordem mínima. O procedimento de projeto pode ser simplificado se utilizarmos a técnica de projeto desenvolvida para o observador de ordem plena.

Observador de ordem mínima

Vamos comparar a equação de estado do observador de ordem plena com a do observador de ordem mínima. A equação de estado do observador de estado de ordem plena é:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

e a 'equação de estado' do observador de ordem mínima é:

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{A}_{ba}\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_b u$$

A equação de saída do observador de ordem plena é:

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

e a 'equação de saída' do observador de ordem mínima é:

$$\dot{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{aa}\mathbf{x}_a - \mathbf{B}_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

O projeto do observador de ordem mínima pode ser conduzido como segue: primeiro, note que a equação do observador de ordem plena é dada pela Equação (3), que repetimos aqui:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \quad (31)$$

Observador de ordem mínima

Então, fazendo as substituições da Tabela 10.1 na Equação (31), obtemos:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba} \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e (\dot{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{aa} \mathbf{x}_a - \mathbf{B}_a u) \quad (32)$$

onde a matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador de estado é uma matriz $(n - 1) \times 1$. Na Equação (32), note que, para estimar $\tilde{\mathbf{x}}_b$, precisamos diferenciar \mathbf{x}_a . Isso representa uma dificuldade, pois a diferenciação amplifica ruídos. Se $\mathbf{x}_a (= y)$ for ruidoso, o uso de $\dot{\mathbf{x}}_a$ será inaceitável.

TABELA 10.1

Lista das substituições necessárias para escrever a equação do observador de estado de ordem mínima.

| Observador de estado de ordem plena | Observador de estado de ordem mínima |
|---------------------------------------|---|
| $\tilde{\mathbf{x}}$ | $\tilde{\mathbf{x}}_b$ |
| \mathbf{A} | \mathbf{A}_{bb} |
| $\mathbf{B}u$ | $\mathbf{A}_{ba}\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_b u$ |
| y | $\dot{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{aa}\mathbf{x}_a - \mathbf{B}_a u$ |
| \mathbf{C} | \mathbf{A}_{ab} |
| \mathbf{K}_e (matriz $n \times 1$) | \mathbf{K}_e [matriz $(n - 1) \times 1$] |

Observador de ordem mínima

Para evitar essa dificuldade, eliminamos \dot{x}_a da seguinte maneira. Primeiro, reescreva a Equação (32) como:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{x}}_b - \mathbf{K}_e \dot{x}_a &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{x}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}) y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u \\ &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) (\tilde{x}_b - \mathbf{K}_e y) \\ &\quad + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u\end{aligned}\tag{33}$$

Defina

$$\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \eta$$

e

$$\tilde{x}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \tilde{\eta}\tag{34}$$

Então, a Equação (33) resulta em:

$$\ddot{\tilde{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u\tag{35}$$

Defina

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa} \\ \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a\end{aligned}$$

Então, a Equação (35) resulta em:

$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{\mathbf{A}} \tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}} y + \hat{\mathbf{F}} u \quad (36)$$

Juntas, as equações (36) e (34) definem o observador de ordem mínima.

Observador de ordem mínima

Como

$$y = \begin{bmatrix} 1 & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{K}_e \end{bmatrix} y$$

onde $\mathbf{0}$ é um vetor-linha que contém $(n - 1)$ zeros, se definirmos:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix}$$

então, poderemos escrever $\tilde{\mathbf{x}}$ em termos de $\tilde{\eta}$ e y , como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{C}}\tilde{\eta} + \hat{\mathbf{D}}y \quad (37)$$

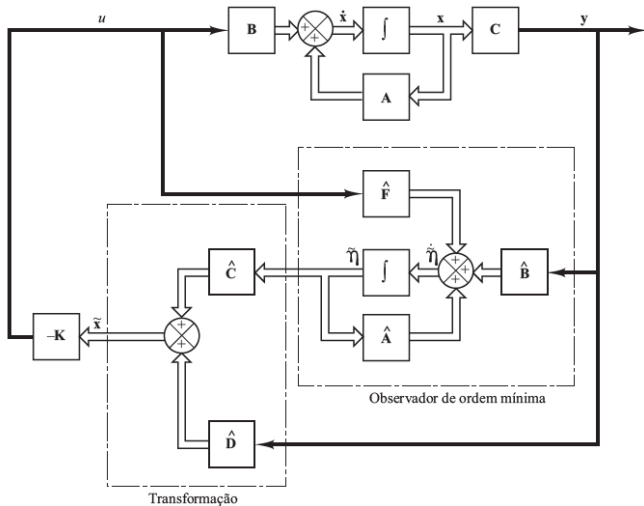
Essa equação fornece a transformação de $\tilde{\eta}$ em $\tilde{\mathbf{x}}$.

A Figura 10.17 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle realimentado por estado observado com o observador de ordem mínima, fundamentado nas equações (25), (26), (36) e (37) e $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$.

Observador de ordem mínima

FIGURA 10.17

Sistema com realimentação por estado observado, onde o observador é de ordem mínima.



Observador de ordem mínima

Em seguida, obteremos a equação do erro do observador. Utilizando a Equação (29), a Equação (32) pode ser modificada para:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba} \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \mathbf{x}_b \quad (38)$$

Subtraindo a Equação (38) da Equação (30), obtemos:

$$\dot{\mathbf{x}}_b - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})(\mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b) \quad (39)$$

Defina

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b = \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

Então, a Equação (39) resulta em:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{e} \quad (40)$$

Esta é a equação do erro do observador de ordem mínima. Note que \mathbf{e} é um vetor de dimensão $(n - 1)$.

Observador de ordem mínima

As dinâmicas de erro podem ser livremente escolhidas, seguindo-se a técnica desenvolvida para o observador de ordem plena, desde que o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

seja $n-1$. (Esta é a condição de observabilidade completa aplicada ao observador de ordem mínima.) A equação característica do observador de ordem mínima é obtida a partir da Equação (40), como segue:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_{n-1}) \\ &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

onde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ são os autovalores desejados do observador de ordem mínima. A matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador pode ser determinada escolhendo-se primeiro os autovalores desejados do observador de ordem mínima (ou seja, alocando-se as raízes da equação característica, a Equação (41), nas posições desejadas) e utilizando-se o procedimento desenvolvido para o observador de ordem plena com as modificações apropriadas.

Observador de ordem mínima

Por exemplo, se a fórmula de determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e , dada pela Equação (6), for utilizada, ela deverá ser modificada para:

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{N}}')^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

onde \mathbf{K}_e será uma matriz $(n-1) \times 1$ e

$$\hat{\mathbf{N}} = [\mathbf{A}'_{ab} \mid \mathbf{A}'_{bb}\mathbf{A}'_{ab} \mid \cdots \mid (\mathbf{A}'_{bb})^{n-2}\mathbf{A}'_{ab}] = \text{matriz}(n-1) \times (n-1)$$
$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-3} & \cdots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{matriz}(n-1) \times (n-1)$$

Note que $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n-2}$ são os coeficientes na equação característica da equação de estado

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_{n-2} s + \hat{a}_{n-1} = 0$$

Observador de ordem mínima

Da mesma maneira, se a fórmula de Ackermann, dada pela Equação (10), for usada, então ela deverá ser modificada para

$$\mathbf{K}_e = \Phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

onde

$$\Phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} \mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1} \mathbf{I}$$

Sistema de controle realimentado por meio de estado observado com observador de ordem mínima

Para o caso do sistema de controle realimentado por estado observado, com observador de ordem plena, mostramos que os polos de malha fechada consistem nos polos devidos ao projeto isolado da alocação de polos e dos polos devidos ao projeto isolado do observador. Consequentemente, o projeto da alocação de polos e o projeto do observador de estado de ordem plena são independentes entre si (**Princípio da Separação**).

Para o caso do sistema de controle realimentado por estado observado com observador de ordem mínima, a mesma conclusão se aplica. A equação característica do sistema pode ser obtida como

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = 0 \quad (44)$$

Os polos de malha fechada do sistema de controle realimentado por estado observado com um observador de ordem mínima compreendem os polos de malha fechada da alocação de polos [os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$] e os polos de malha fechada devidos ao observador de ordem mínima [os autovalores da matriz $(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})$]. Portanto, o projeto da alocação de polos e o projeto do observador de estado de ordem mínima são independentes entre si.

Determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador com o MATLAB

- Por causa da dualidade entre a alocação de polos e o projeto do observador, o mesmo algoritmo pode ser aplicado tanto para o problema de alocação de polos como para o problema de projeto do observador.
- Assim, os comandos `acker` e `place` podem ser usados para a determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador.
- Os polos de malha fechada do observador são os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Os polos de malha fechada do problema de alocação de polos são os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.
- Com base na dualidade entre o problema de alocação de polos e o problema de projeto do observador, podemos determinar \mathbf{K}_e considerando o problema de alocação de polos para o sistema dual. Ou seja, determinamos \mathbf{K}_e por meio da alocação dos autovalores de $\mathbf{A}' - \mathbf{C}'\mathbf{K}_e$ nas posições desejadas.

Determinação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador com o MATLAB

Como $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}'$, para o observador de ordem plena, utilizamos o comando

$$\mathbf{K}_e = \text{acker}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{L})'$$

onde \mathbf{L} é o vetor dos autovalores desejados do observador. Da mesma maneira, podemos utilizar, para o observador de ordem plena,

$$\mathbf{K}_e = \text{place}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{L})'$$

desde que \mathbf{L} não contenha polos múltiplos.

Para os observadores de ordem mínima (ou ordem reduzida), use os seguintes comandos:

$$\mathbf{K}_e = \text{acker}(\mathbf{A}bb', \mathbf{A}ab', \mathbf{L})'$$

ou

$$\mathbf{K}_e = \text{place}(\mathbf{A}bb', \mathbf{A}ab', \mathbf{L})'$$

Exemplo 10.8

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

Vamos supor que desejemos alocar os polos de malha fechada em:

$$s_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad s_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad s_3 = -6$$

Então, a matriz de ganho \mathbf{K} necessária da realimentação de estado resultará em:

$$\mathbf{K} = [90 \ 29 \ 4]$$

Veja o Programa 10.10 em MATLAB para a determinação da matriz \mathbf{K} com o MATLAB.

Exemplo 10.8

Em seguida, vamos supor que a saída y possa ser medida precisamente, tal que a variável de estado x_1 (que é igual a y) não precise ser estimada. Vamos projetar um observador de ordem mínima. (O observador de ordem mínima é de segunda ordem.) Suponha que escolhemos os polos desejados de malha fechada em

$$s = -10, \quad s = -10$$

Com relação à Equação (41), a equação característica do observador de ordem mínima é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 10)(s + 10) = s^2 + 20s + 100 = 0$$

A seguir, utilizaremos a fórmula de Ackermann, dada pela Equação (43):

$$\mathbf{K}_e = \Phi(\mathbf{A}_{bb}) \left[\frac{\mathbf{A}_{ab}}{\mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

onde

$$\Phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^2 + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_2 \mathbf{I} = \mathbf{A}_{bb}^2 + 20\mathbf{A}_{bb} + 100\mathbf{I}$$

Exemplo 10.8

Como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array} \right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

temos:

$$A_{aa} = 0, \quad \mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_a = 0, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Equação (45) agora resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 89 & 14 \\ -154 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A determinação desta \mathbf{K}_e com o MATLAB é dada pelo Programa 10.10.

Exemplo 10.8

Programa 10.10 em MATLAB

```
A = [0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
B = [0;0;1];
J = [-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3) -6];
K = acker(A,B,J)

K =
    90.0000    29.0000     4.0000

Abb = [0 1;-11 -6];
Aab = [1 0];
L = [-10 -10];
Ke = acker(Abb',Aab',L) '

Ke =
    14
     5
```

Exemplo 10.8

Com relação às equações (34) e (35), a equação do observador de ordem mínima pode ser dada por:

$$\dot{\tilde{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a) u \quad (46)$$

onde

$$\tilde{\eta} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_1$$

Sabendo que

$$\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix}$$

a equação do observador de ordem mínima, Equação (46), resulta em:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right\} y \\ &\quad + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right\} u \end{aligned}$$

Exemplo 10.8

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -191 \\ -260 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

onde

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_e y$$

ou

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_e y$$

Se a realimentação do estado observado for utilizada, então o sinal de controle u resultará em

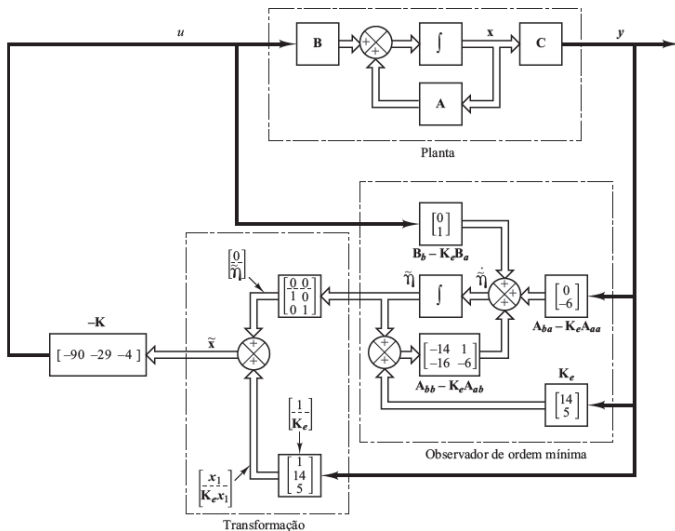
$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{K} será a matriz de ganho de realimentação de estado.

A Figura 10.18 é um diagrama de blocos que mostra a configuração do sistema com a realimentação do estado observado, onde o observador é de ordem mínima.

FIGURA 10.18

Sistema com realimentação por estado observado, onde o observador de ordem mínima é projetado conforme o Exemplo 10.8.



Função de transferência do controlador baseado em observador de ordem mínima

Na equação do observador de ordem mínima dada pela Equação (35):

$$\dot{\tilde{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a) u$$

defina, similarmente à determinação da Equação (36),

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a$$

Então, as três equações seguintes definem o observador de ordem mínima:

$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{\mathbf{A}} \tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}} y + \hat{\mathbf{F}} u \quad (47)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y \quad (48)$$

$$u = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}} \quad (49)$$

Função de transferência do controlador baseado em observador de ordem mínima

Como a Equação (49) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} K_a & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = -K_a y - \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{x}}_b \\ &= -\mathbf{K}_b \tilde{\eta} - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) y \end{aligned} \quad (50)$$

pela substituição da Equação (50) na Equação (47), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= \hat{\mathbf{A}}\tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}[-\mathbf{K}_b \tilde{\eta} - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e)y] \\ &= (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b)\tilde{\eta} + [\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e)]y \end{aligned} \quad (51)$$

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) \\ \tilde{\mathbf{C}} &= -\mathbf{K}_b \\ \tilde{D} &= -(K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) \end{aligned}$$

Então, as equações (50) e (51) podem ser escritas como:

$$\dot{\tilde{\eta}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\eta} + \tilde{\mathbf{B}}y \quad (52)$$

$$u = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\eta} + \tilde{D}y \quad (53)$$

As equações (52) e (53) definem o controlador baseado em observador de ordem mínima. Considerando u como saída e $-y$ como entrada, $U(s)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} U(s) &= [\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}]Y(s) \\ &= -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}][-Y(s)] \end{aligned}$$

Como a entrada do controlador-observador é $-Y(s)$, em vez de $Y(s)$, a função de transferência do controlador-observador é:

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}] \quad (54)$$

Essa função de transferência pode ser facilmente obtida com o uso da seguinte declaração em MATLAB:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, -\tilde{\mathbf{C}}, -\tilde{D}) \quad (55)$$

Os slides dessa aula foram baseados em

- Ogata, Katsuhiko “Engenharia de Controle Moderno”. 5ª edição, Pearson, 2010. ISBN: 9788576058106. **(Capítulo 10.5).**