EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 5.2: Projeto de sistemas de controle no espaço de estados: Introdução e Alocação de Polos

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: https://cfmorais.fee.unicamp.br/

Introdução

- O capítulo 10 do livro "Ogata, Katsuhiko Engenharia de controle moderno, 5. ed. – São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2010" discute métodos de projeto no espaço de estados baseados nos métodos da alocação de polos, observadores, o regulador quadrático ótimo e os aspectos introdutórios dos sistemas de controle robusto.
- O método da alocação de polos é, de certa maneira, similar ao método do lugar das raízes, no qual alocamos os polos de malha fechada nas posições desejadas.
- A diferença básica é que, no projeto pelo lugar das raízes, alocamos somente os polos dominantes de malha fechada nas posições desejadas, enquanto no projeto por alocação de polos alocamos **todos** os polos de malha fechada nas posições desejadas.

Alocação de Polos

- Nesta aula, apresentaremos um método de projeto comumente denominado alocação de polos ou designação de polos.
- Admitimos que todas as variáveis de estado sejam mensuráveis e que estejam disponíveis para realimentação.
- Será mostrado que, se o sistema considerado for de estado completamente controlável, então os polos de malha fechada do sistema poderão ser alocados em qualquer posição desejada por meio de uma realimentação de estado, empregando uma matriz de ganho apropriada.
- Essa técnica de projeto inicia-se com a determinação dos polos de malha fechada desejados, com base nas especificações da resposta temporal e/ou da resposta em frequência, como velocidade, coeficiente de amortecimento ou banda passante, bem como das especificações de regime permanente.

Alocação de Polos

- Vamos supor que os polos desejados de malha fechada devam estar em $s = \mu_1$, $s = \mu_2$, ..., $s = \mu_n$.
- Escolhendo uma matriz de ganho apropriada de realimentação de estados, é possível forçar o sistema a ter polos de malha fechada nas posições desejadas, desde que o sistema original seja de estado completamente controlável.
- A nível de graduação, limitamos nossa discussão aos sistemas de uma entrada e uma saída (SISO - *Single Input Single Output*). Ou seja, vamos supor que o sinal de controle $u(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ sejam escalares. No desenvolvimento desta seção, vamos supor que o sinal de referência $r(t)$ seja nulo.
- A seguir, provaremos que há uma condição necessária e suficiente para que os polos de malha fechada possam ser alocados em posições arbitrárias no plano s: o estado do sistema precisa ser completamente controlável.
- Então, discutiremos métodos para a determinação da matriz de ganho de realimentação de estado requerida.

Projeto por alocação de polos

- Na abordagem convencional, para um sistema de uma entrada e uma saída, projetamos um controlador (compensador) tal que os polos dominantes de malha fechada tenham um coeficiente de amortecimento ζ desejado e uma frequência natural não amortecida ω_n. **Note que, nessa abordagem, admitimos que os efeitos na resposta dos polos não dominantes de malha fechada sejam desprezíveis.**
- Em vez de especificar somente os polos dominantes de malha fechada (abordagem pelo projeto convencional), a presente abordagem especifica **todos os polos de malha fechada**.
- Contudo, existem custos e requisitos associados à alocação de todos os polos de malha fechada:
  - **todas as variáveis de estado devem poder ser medidas** com sucesso, ou, então, requer a inclusão de um observador de estado no sistema;
  - e para que os polos de malha fechada sejam arbitrariamente alocados em posições escolhidas, o sistema deve ser de **estado completamente controlável**.

Projeto por alocação de polos

Considere o sistema de controle

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde
$\mathbf{x}$ = vetor de estado (vetor n)
y = sinal de saída (escalar)
u = sinal de controle (escalar)
$\mathbf{A}$ = matriz constante $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz constante $n \times 1$
$\mathbf{C}$ = matriz constante $1 \times n$
D = constante (escalar)

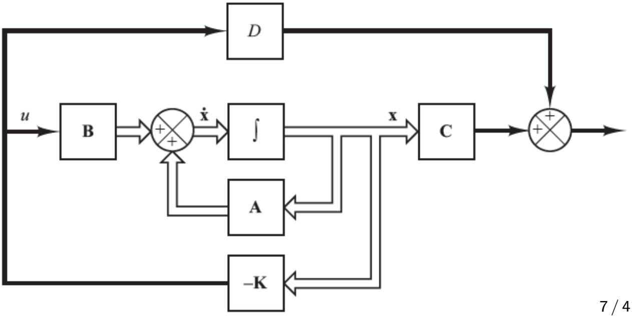
Projeto por alocação de polos

Escolheremos o sinal de controle como

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{2}$$

Isso significa que o sinal de controle u é determinado por um estado instantâneo. Esse esquema é denominado realimentação de estado. A matriz $\mathbf{K}$ $1 \times n$ é denominada matriz de ganho de realimentação de estado. Vamos supor que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Na análise seguinte, vamos supor que u seja não limitado. Um diagrama de blocos desse sistema é mostrado na Figura 10.1.

FIGURA 10.1 Sistema de controle de malha fechada com $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$.



Projeto por alocação de polos

O sistema de malha fechada da Figura 10.1 não possui entradas. Seu objetivo é manter a saída nula (seguir a entrada de referência $= 0$). Por causa dos distúrbios que podem estar presentes, a saída vai se desviar de zero. A saída não nula vai retornar para o valor nulo correspondente à entrada de referência nula, por causa do esquema de realimentação de estado do sistema. Esse sistema em que a entrada de referência é sempre nula é denominado **sistema regulador**. (Note que, se a referência de entrada do sistema for sempre uma **constante** não nula, o sistema também será denominado sistema regulador.)

Projeto por alocação de polos

A substituição da Equação (2) na Equação (1) resulta em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x}(t)$$

A solução dessa equação é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t}\mathbf{x}(0) \tag{3}$$

onde $\mathbf{x}(0)$ é o estado inicial causado pelos distúrbios externos. A estabilidade e a característica da resposta temporal são determinadas pelos autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Se a matriz $\mathbf{K}$ for escolhida corretamente, a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ poderá ser assintoticamente estável e, para todo $\mathbf{x}(0) \neq 0$, será possível fazer $\mathbf{x}(t)$ tender a 0, à medida que t tender a infinito. Os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ são denominados polos reguladores. Se eles forem posicionados no lado esquerdo do plano s, então $\mathbf{x}(t)$ tenderá a 0 à medida que t tender a infinito. O problema de alocar polos reguladores (polos de malha fechada) nas posições desejadas é denominado problema de alocação de polos.
A seguir, provaremos que a alocação arbitrária de polos para dado sistema é possível se, e somente se, o sistema for de estado completamente controlável.

Provaremos que há uma condição necessária e suficiente para uma alocação arbitrária de polos: o estado do sistema precisa ser completamente controlável. Obteremos primeiro a condição necessária. Começamos provando que, se o sistema não for de estado completamente controlável, então existem autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ que não podem ser controlados por realimentação de estado.

Suponha que o sistema dado pela Equação (1) não seja de estado completamente controlável. Então, o posto da matriz de controlabilidade será menor que n, ou

$$\text{posto}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array}\right] = q < n$$

Isso significa que existem q vetores-coluna linearmente independentes na matriz de controlabilidade. Vamos definir esses vetores-coluna linearmente independentes como $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$,. . ., $\mathbf{f}_q$ e escolher também $n-q$ vetores adicionais $\mathbf{v}_{q+1}$, $\mathbf{v}_{q+2}$, . . . , $\mathbf{v}_n$ de dimensão n de modo que

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_q & \mathbf{v}_{q+1} & \mathbf{v}_{q+2} & \cdots & \mathbf{v}_n \end{array}\right]$$

tenha posto n. Então, pode-se mostrar que:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right], \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Agora, defina:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \end{array}\right]$$

Então, temos:

$$
\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| &= |\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{P}| \\
&= |s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{P}| \\
&= |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}| \\
&= \left| s\mathbf{I} - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \end{array}\right] \right| \\
&= \left| \begin{array}{c|c} s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1 & -\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_2 \\ \hline \mathbf{0} & s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22} \end{array} \right| \\
&= |s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1| \cdot |s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22}| = 0
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{I}_q$ é uma matriz-identidade de dimensão q e $\mathbf{I}_{n-q}$ é uma matriz-identidade de dimensão $(n-q)$.

Note que os autovalores de $\mathbf{A}_{22}$ não dependem de $\mathbf{K}$. Assim, se o sistema não for de estado completamente controlável, então existem autovalores da matriz $\mathbf{A}$ que não poderão ser arbitrariamente alocados. Por consequência, para alocar os autovalores da matriz $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$ de maneira aleatória, o sistema deve ser de estado completamente controlável (condição necessária). Em seguida, provaremos a condição suficiente: ou seja, se o sistema for de estado completamente controlável, então todos os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ poderão ser arbitrariamente alocados. Para provar a condição suficiente, é conveniente transformar a equação de estado dada pela Equação (1) na forma canônica controlável.

Defina uma matriz de transformação $\mathbf{T}$ por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \tag{4}$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de controlabilidade

$$\mathbf{M} = \left[\; \mathbf{B} \;\middle|\; \mathbf{AB} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \;\right] \tag{5}$$

e

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

onde os a_i são coeficientes do polinômio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$$

Condição necessária e suficiente para alocação arbitrária de polos

Defina um novo vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}$ por

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

Se o posto da matriz $\mathbf{M}$ de controlabilidade for n (significando que o sistema é de estado completamente controlável), então a inversa da matriz $\mathbf{T}$ existe e a Equação (1) poderá ser modificada para

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{x} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \tag{7}$$

onde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

A Equação (7) está na forma canônica controlável. Assim, dada uma equação de estado, como a Equação (1), ela pode ser transformada para a forma canônica controlável se o sistema for de estado completamente controlável e se transformarmos o vetor de estado $\mathbf{x}$ no vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}$ com a utilização da matriz de transformação $\mathbf{T}$ dada pela Equação (4).

Vamos escolher um conjunto de autovalores desejados como μ_1, μ_2, ..., μ_n. Então, a equação característica desejada resulta em:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \quad (10)$$

Vamos escrever:

$$\mathbf{KT} = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Quando $u = -\mathbf{KT}\hat{\mathbf{x}}$ for utilizada para controlar o sistema dado pela Equação 10.7, a equação do sistema resultará em:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\hat{\mathbf{x}}$$

A equação característica é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Essa equação característica é igual à equação característica do sistema definido pela Equação (1), quando $u = -\mathbf{Kx}$ for utilizada como sinal de controle. Isso pode ser observado como a seguir. Como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

a equação característica desse sistema é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{T}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Vamos agora simplificar a equação característica do sistema na forma canônica controlável. Com relação às equações (8), (9) e (11), temos:

$$
\begin{aligned}
&|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| \\
&= \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} \\
&= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Esta é a equação característica do sistema com realimentação de estado. Consequentemente, ela deve ser igual à Equação (10), a equação característica desejada. Igualando os coeficientes de mesma potência em s, temos:

$$
\begin{aligned}
a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\
a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\
&\vdots \\
a_n + \delta_n &= \alpha_n
\end{aligned}
$$

Resolvendo as equações precedentes para os δ e substituindo-as na Equação (11
obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \\
&= \left[\ \alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \cdots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1\ \right] \mathbf{T}^{-1}
\end{aligned} \qquad (13)
$$

Assim, se o sistema for de estado completamente controlável, todos os autovalores poderão ser arbitrariamente alocados escolhendo-se a matriz **K** de acordo com a Equação (13) (condição suficiente).

Provamos, então, a condição necessária e suficiente para uma alocação arbitrária de polos: o estado do sistema é completamente controlável.

Note que, se o sistema não for de estado completamente controlável, mas for estabilizável, então será possível tornar todo o sistema estável alocando os polos de malha fechada nas posições desejadas para os q modos controláveis. Os $n - q$ modos não controláveis remanescentes são estáveis. Logo, o sistema completo pode ser feito estável.

Determinação de $\mathbf{K}$ com a matriz de transformação $\mathbf{T}$

Suponha que o sistema seja definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

e que o sinal de controle seja dado por:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

A matriz de ganho $\mathbf{K}$ de realimentação que força os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ a serem μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n, (valores desejados) pode ser determinada pelas seguintes etapas (se μ for um autovalor complexo, então seu conjugado também precisará ser um autovalor de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$):

Etapa 1: verifique a condição de controlabilidade do sistema. Se o sistema for de estado completamente controlável, então utilize os passos seguintes:

Etapa 2: a partir da equação característica da matriz $\mathbf{A}$, ou seja,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

determine os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Determinação de $\mathbf{K}$ com a matriz de transformação $\mathbf{T}$

Etapa 3: determine a matriz de transformação $\mathbf{T}$ que transforma a equação de estado do sistema na forma canônica controlável. (Se a equação do sistema dado já estiver na forma canônica controlável, então $\mathbf{T} = \mathbf{I}$.) Não é necessário escrever a equação de estado na forma canônica controlável. Tudo o que precisamos aqui é encontrar a matriz $\mathbf{T}$. A matriz de transformação $\mathbf{T}$ é dada pela Equação (4), ou

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

onde $\mathbf{M}$ é dada pela Equação (5) e $\mathbf{W}$ é dada pela Equação (6).

Etapa 4: utilizando os autovalores desejados (polos desejados de malha fechada), escreva o polinômio característico desejado:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \ldots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

determine os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Etapa 5: a matriz de ganho $\mathbf{K}$ de realimentação de estado requerida pode ser determinada pela Equação (13), reescrita desta maneira:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \cdots & \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{array}\right] \mathbf{T}^{-1}$$

Determinação de $\mathbf{K}$ pelo método de substituição direta

Se o sistema for de ordem baixa ($n \leq 3$), a substituição direta da matriz $\mathbf{K}$ no polinômio característico desejado poderá ser mais simples. Por exemplo, se $n = 3$, então escreva a matriz de ganho $\mathbf{K}$ de realimentação de estado como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Substitua essa matriz $\mathbf{K}$ no polinômio característico desejado $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|$ e iguale a $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$, ou

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Como ambos os lados da equação característica são polinômios em s, igualando os coeficientes de mesma potência em s em ambos os lados, é possível determinar os valores de k_1, k_2 e k_3. Essa abordagem é conveniente se $n = 2$ ou 3. (Para $n = 4, 5, 6, \ldots$, essa abordagem pode se tornar muito tediosa.) Note que, se o sistema não for de estado completamente controlável, a matriz $\mathbf{K}$ não poderá ser determinada (não existe solução).

Determinação de **K** pela fórmula de Ackermann

Existe uma fórmula bem conhecida, denominada fórmula de Ackermann, para a determinação da matriz de ganho **K** de realimentação de estado. Apresentaremos esta fórmula a seguir.
Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde utilizamos o controle por realimentação de estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Vamos supor que o sistema seja de estado completamente controlável. Vamos supor também que os polos desejados de malha fechada estejam em $s = \mu_1$, $s = \mu_2$, ..., $s = \mu_n$.
O uso do controle por realimentação de estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

modifica a equação do sistema para

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\mathbf{x} \tag{14}$$

Determinação de **K** pela fórmula de Ackermann

Vamos definir:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

A equação característica desejada é:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| &= |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Como o teorema de Cayley-Hamilton estabelece que $\tilde{\mathbf{A}}$ satisfaz sua própria equação característica, temos:

$$\Phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{15}$$

Utilizaremos a Equação (15) na obtenção da fórmula de Ackermann. Para simplificar o procedimento, consideramos o caso em que $n = 3$. (O procedimento pode ser facilmente estendido para qualquer outro n, positivo e inteiro.)

Determinação de $\mathbf{K}$ pela fórmula de Ackermann

Considere as seguintes identidades:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}^0 &= \mathbf{I} \\
\tilde{\mathbf{A}}^1 &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \\
\tilde{\mathbf{A}}^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\
\mathbf{A}^3 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2
\end{aligned}
$$

Multiplicando as equações precedentes, na mesma ordem, respectivamente por α_3, α_2, α_1 e α_0 (onde $\alpha_0 = 1$) e somando os resultados, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 \\
&= \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \alpha_1(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \\
&\qquad\qquad \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\
&= \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2\mathbf{B}\mathbf{K} - \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \alpha_1\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\
&\qquad\qquad - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Determinação de $\mathbf{K}$ pela fórmula de Ackermann

Com relação à Equação (15), temos:

$$\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 = \Phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$$

Temos também que:

$$\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \Phi(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$$

Substituindo as últimas duas equações na Equação (16), temos:

$$\Phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \Phi(\mathbf{A}) - \alpha_2\mathbf{B}\mathbf{K} - \alpha_1\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K}$$

Determinação de $\mathbf{K}$ pela fórmula de Ackermann

Como $\Phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{A}) &= \mathbf{B}(\alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2\mathbf{BK} \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

Uma vez que o sistema é de estado completamente controlável, a inversa da matriz de controlabilidade

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array}\right]$$

existe. Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (17) pela inversa da matriz de controlabilidade, obtemos:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array}\right]^{-1} \Phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

Determinação de **K** pela fórmula de Ackermann

Pré-multiplicando ambos os lados dessa última equação por $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array} \right]^{-1} \Phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array} \right]^{-1} \Phi(\mathbf{A})$$

Essa última equação fornece a matriz de ganho **K** de realimentação de estado requerida.
Para um n inteiro, positivo e arbitrário, temos:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array} \right]^{-1} \Phi(\mathbf{A}) \tag{18}$$

A Equação (18) é conhecida como fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho **K** de realimentação de estado.

Sistemas reguladores e sistemas de controle

Sistemas que incluem controladores podem ser divididos em duas categorias:

- sistemas reguladores (onde o sinal de referência é constante, incluindo o zero) e
- sistemas de controle (onde o sinal de referência varia com o tempo).

Escolhendo a localização dos polos de malha fechada desejados

O primeiro passo na abordagem de projeto por alocação de polos consiste em escolher a localização dos polos de malha fechada desejados. A técnica mais frequentemente utilizada está baseada na escolha desses polos com base na experiência do projeto pelo lugar das raízes, alocando um par de polos dominantes de malha fechada e escolhendo os outros polos de modo que eles fiquem bem distantes, à esquerda dos polos dominantes de malha fechada.

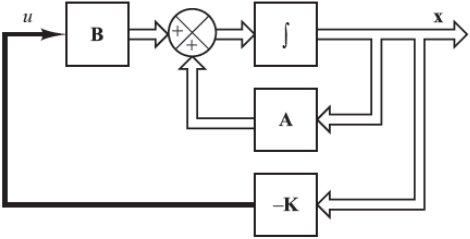
Observe que, se alocarmos os polos dominantes de malha fechada distantes do eixo $j\omega$, de modo que a resposta do sistema se torne muito rápida, os sinais no sistema se tornarão muito elevados, fazendo que o sistema se torne não linear, o que deve ser evitado.

Outra opção de projeto é baseada na abordagem pelo controle quadrático ótimo. Essa abordagem determinará os polos desejados de malha fechada para que haja uma conciliação entre a resposta aceitável e o total de energia de controle requerida. Note que requerer uma resposta de alta velocidade implica exigir grande quantidade de energia de controle. Da mesma maneira, em geral, um aumento na velocidade de resposta requer um atuador maior e mais pesado, que custará mais.

Exemplo 10.1

Considere o sistema regulador mostrado na Figura 10.2.

FIGURA 10.2
Sistema regulador.



A planta é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10.1

O sistema utiliza o controle por realimentação de estado $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Vamos escolher os polos desejados de malha fechada em

$$s = -2 + j4, \qquad s = -2 - j4, \qquad s = -10$$

(Fazemos essa escolha porque sabemos, por experiência, que esse conjunto de polos de malha fechada resultará em uma resposta temporal razoável ou, ao menos, aceitável.) Determine a matriz de ganho $\mathbf{K}$ de realimentação de estado.

Primeiro, precisamos verificar a matriz de controlabilidade do sistema. Como a matriz de controlabilidade $\mathbf{M}$ é dada por:

$$\mathbf{M} = \left[\ \mathbf{B}\ \middle|\ \mathbf{AB}\ \middle|\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

encontramos $|\mathbf{M}| = -1$ e, portanto, o posto de $\mathbf{M} = 3$. Assim, o sistema é de estado completamente controlável e a alocação arbitrária de polos é possível.

Método 1:

O primeiro método faz uso da Equação (13). A equação característica do sistema é:

$$
\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix} \\
&= s^3 + 6s^2 + 5s + 1 \\
&= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 1$$

A equação característica desejada é:

$$
\begin{aligned}
(s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) &= s^3 + 14s^2 + 60s + 200 \\
&= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0
\end{aligned}
$$

Método 1:

Portanto,

$$\alpha_1 = 14, \quad \alpha_2 = 60, \quad \alpha_3 = 200$$

Com relação à Equação (13), temos:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_3 - a_3 & \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{array}\right] \mathbf{T}^{-1}$$

onde, para esse problema, $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, uma vez que a equação de estado é fornecida na forma canônica controlável. Então, temos:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c|c} 200 - 1 & 60 - 5 & 14 - 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix}$$

Método 2:

Definindo a matriz desejada de ganho $\mathbf{K}$ de realimentação de estado como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

e igualando $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}|$ com a equação característica desejada, obtemos:

$$\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 + k_1 & 5 + k_2 & s + 6 + k_3 \end{vmatrix} \\
&= s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + 1 + k_1 \\
&= s^3 + 14s^2 + 60s + 200
\end{aligned}$$

Logo, $6 + k_3 = 14$, $5 + k_2 = 60$, $1 + k_1 = 200$, a partir da qual obtemos: $k_1 = 199$, $k_2 = 55$, $k_3 = 8$, ou $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix}$

Método 3:

O terceiro método faz uso da fórmula de Ackermann. Com relação à Equação (18), temos:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\ \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \right]^{-1} \Phi(\mathbf{A})$$

Como

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 60\mathbf{A} + 200\mathbf{I} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \\
&\quad + 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Método 3:

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Método 3:

Como era de esperar, as matrizes de ganho $\mathbf{K}$ obtidas pelos três métodos são as mesmas. Com essa realimentação de estado, os polos de malha fechada ficam alocados em $s = -2 \pm j4$ e $s = -10$, como especificado.

Note que, se a ordem n do sistema for 4 ou maior, os métodos 1 e 3 serão recomendados, uma vez que todas as manipulações matriciais podem ser realizadas pelo computador. Se o método 2 for usado, os cálculos manuais se tornarão necessários, pois o computador pode não ser apropriado para lidar com uma equação característica com parâmetros desconhecidos k_1, k_2, $\ldots$, k_n.

Comentários

É importante notar que a matriz **K** não é única para um sistema dado, mas depende da localização desejada dos polos de malha fechada (que determinam a velocidade e o amortecimento da resposta) selecionados. Note que a seleção dos polos de malha fechada desejados ou da equação característica desejada é um compromisso entre a velocidade de resposta do vetor de erro e a sensibilidade aos distúrbios e aos ruídos de medida. Ou seja, se aumentarmos a velocidade da resposta do erro, em geral os efeitos contrários nos distúrbios e nos ruídos de medida aumentarão. Se o sistema for de segunda ordem, então as dinâmicas do sistema (resposta característica) poderão ser precisamente correlacionadas com as localizações dos polos de malha fechada e com o(s) zero(s) da planta. Para sistemas de ordem superior, a localização dos polos de malha fechada e as dinâmicas do sistema (resposta característica) não são tão facilmente correlacionadas. Consequentemente, para a determinação da matriz de ganho **K** de realimentação de estado para dado sistema, é desejável examinar a resposta característica por meio de simulações computacionais para várias matrizes **K** distintas (com base em várias e distintas equações características desejadas) e escolher aquela que confere o melhor desempenho global do sistema.

Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Ogata, Katsuhiko "Engenharia de Controle Moderno". 5ª edição, Pearson, 2010. ISBN: 9788576058106. **(Capítulo 10.1 - 10.3).**