EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo
Parte 5.1: Revisão Espaço de Estados

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: https://cfmorais.fee.unicamp.br/

MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS

Equações no espaço de estados

De um modo simplificado serão consideradas as seguintes equações de estado:

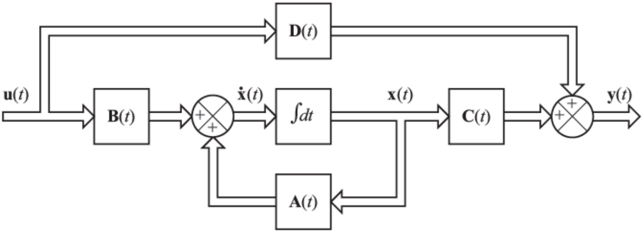
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

onde **A** é chamada matriz de estado, **B**, de matriz de entrada, **C**, de matriz de saída, e **D**, de matriz de transmissão direta. A Equação (1) é a equação de estado de um sistema linear invariante no tempo e a Equação (2) é a equação de saída para o mesmo sistema.

Uma representação do diagrama de blocos das equações (1) e (2) é mostrada na Figura 2.14.

FIGURA 2.14
Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo, representado no espaço de estados.



Exemplo 2.12

Considere o sistema mecânico indicado na Figura 2.15. Admitimos que o sistema seja linear. A força externa $u(t)$ é a entrada do sistema, e o deslocamento $y(t)$ da massa é a saída. O deslocamento $y(t)$ é medido a partir da posição de equilíbrio, na ausência da força externa. Este é um sistema de entrada e saída únicas.

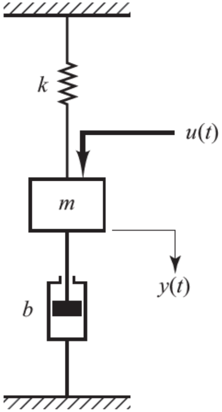


FIGURA 2.15 Sistema mecânico.

Exemplo 2.12

De acordo com o diagrama, a equação do sistema é:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \tag{3}$$

Esse sistema é de segunda ordem. Isso significa que ele contém duas derivadas ou dois integradores. Vamos definir as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam respectivamente a posição e a velocidade da massa:

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Então obtemos

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

ou

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{4}$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \tag{5}$$

A equação de saída é:

$$y = x_1 \tag{6}$$

Exemplo 2.12

Sob a forma vetorial-matricial, as equações (4) e (5) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \tag{7}$$

A equação de saída, Equação (6), pode ser escrita como:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

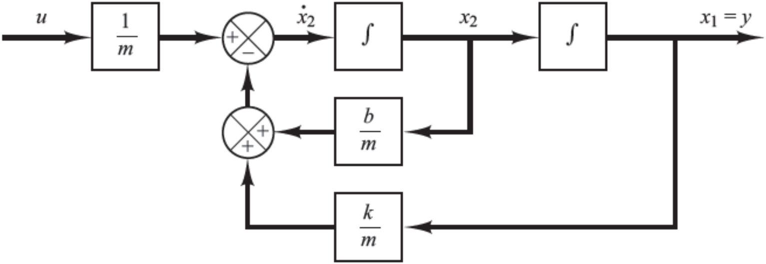
A Equação (7) é uma equação de estado e a Equação (8) é uma equação de saída para o sistema. As equações (7) e (8) estão escritas na forma-padrão (1), (2), onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0.$$

Exemplo 2.12

A Figura 2.16 é um diagrama de blocos do sistema. Note que as saídas dos integradores são variáveis de estado.

FIGURA 2.16 Diagrama de blocos do sistema mecânico mostrado na Figura 2.15.



Funções de transferência e equações no espaço de estados

A seguir, mostraremos como obter uma função de transferência de um sistema de entrada e de saída únicas a partir das equações no espaço de estados.
Consideremos o sistema cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \tag{9}$$

Esse sistema pode ser representado no espaço de estados pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{10}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{11}$$

onde x é o vetor de estado, u é a entrada e y é a saída.

Funções de transferência e equações no espaço de estados

A transformada de Laplace das equações (10) e (11) é dada por:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \tag{12}$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \tag{13}$$

Uma vez que a função de transferência é a relação entre a transformada de Laplace da saída e da entrada quando as condições iniciais são nulas, estabelecemos $x(0)$ igual a zero na Equação (12). Então, temos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Multiplicando previamente por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ambos os lados dessa última equação:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \tag{14}$$

Substituindo a Equação (14) na Equação (13), temos:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) \tag{15}$$

Comparando a Equação (15) com a Equação (9), vemos que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \tag{16}$$

é a função de transferência do sistema em termos de **A**, **B**, **C** e D.

Observe que o lado direito da Equação (16) envolve $(sI - A)^{-1}$. Sabe-se que para uma matriz 2×2, por exemplo, tem-se que

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Em consequência, $G(s)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

onde $Q(s)$ é um polinômio em s. A notação $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ é igual ao polinômio característico de $G(s)$.

Definição: Autovalores e polos

O escalar λ é chamado de **autovalor** da matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ e ele corresponde aos polos da função de transferência $G(s)$. Para calcular os autovalores de uma matriz basta resolver a equação característica:

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$$

Exemplo 2.3

Considere novamente o sistema mecânico mostrado na Figura 2.15. As equações de espaço de estados para o sistema são dadas pelas equações (7) e (8).Vamos obter a função de transferência do sistema a partir das equações do espaço de estados. Pela substituição de **A**, **B**, **C** e **D** na Equação (16), obtemos:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}+0 \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & \left(s+\frac{b}{m}\right)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$M^{-1}=\frac{1}{det(M)}\cdot adj(M)\Rightarrow adj(M)=[M_{ij}]' \quad \text{com} \quad M_{ij}=(-1)^{i+j}|H_{ij}|$$

em que H_{ij} é uma submatriz de M, de ordem $(n-1)$ obtida eliminando a i-ésima linha e j-ésima coluna de M. Se M é uma matriz 2×2, tem-se

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a\cdot d-c\cdot b}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

Exemplo 2.3

Note que

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & \left(s+\frac{b}{m}\right) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} \begin{bmatrix} \left(s+\frac{b}{m}\right) & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} \begin{bmatrix} \left(s+\frac{b}{m}\right) & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2+bs+k} \end{aligned}$$

Que seria a mesma função de transferência obtida aplicando-se a transformada de Laplace na equação diferencial de segunda ordem (3):

$$m\ddot{y}+b\dot{y}+ky = u \Rightarrow (ms^2+bs+k)Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2+bs+k}$$

REPRESENTAÇÃO EM FORMAS CANÔNICAS

Representação no espaço de estados em formas canônicas.
Considere um sistema definido pela seguinte equação diferencial de ordem n:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{17}$$

onde u é a entrada e y é a saída. Essa equação também pode ser escrita como a seguinte função de transferência.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots a_{n-1}s + a_n} \tag{18}$$

Muitas técnicas estão disponíveis para a obtenção da representação no espaço de estados a partir de funções de transferência. Nesta aula, introduziremos as representações no espaço de estados de sistemas definidos pelas equações (17) ou (18) nas formas canônicas controlável, observável e diagonal (ou de Jordan).

Forma canônica controlável.

A seguinte representação no espaço de estados é denominada forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} (b_n - a_n b_0) & (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) & \cdots & (b_1 - a_1 b_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (20)$$

A forma canônica controlável é importante na discussão do projeto de sistemas de controle pela abordagem por alocação de polos.

Forma canônica observável.

A seguinte representação no espaço de estados é denominada forma canônica observável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_n - a_n b_0) \\ (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \\ \vdots \\ (b_1 - a_1 b_0) \end{bmatrix} u \qquad (21)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \qquad (22)$$

Note que a matriz de estado $n \times n$ da equação de estado dada pela Equação (21) é a transposta daquela equação de estado definida pela Equação (19).

Forma canônica diagonal.
Considere a função de transferência definida pela Equação (18). Consideramos aqui o caso em que o polinômio do denominador envolve somente raízes distintas. Para o caso de raízes distintas, a Equação (18) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \end{aligned} \tag{23}$$

A forma canônica diagonal da representação no espaço de estados desse sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{24}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{25}$$

Forma canônica de Jordan.
Em seguida, consideraremos o caso em que o polinômio do denominador da Equação (18) envolve raízes múltiplas. Para esse caso, a forma canônica diagonal anterior precisa ser modificada para a forma canônica de Jordan. Suponha, por exemplo, que alguns polos (p_i, $i = 4, \ldots, n$) sejam diferentes entre si, mas os três primeiros polos (p_i, $i = 1,2,3$) são iguais, ou seja, que $p_1 = p_2 = p_3$. Então, a forma fatorada de $Y(s)/U(s)$ resulta em:

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)} \\
&= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}
\end{aligned}
$$

A representação desse sistema no espaço de estados, na forma canônica de Jordan, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{26}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{27}$$

Exemplo 9.1

Considere o sistema dado por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Obtenha a representação no espaço de estados nas formas canônicas controlável, observável e diagonal.

Forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.1

Forma canônica observável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forma canônica diagonal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADOS E EXPONENCIAL DE MATRIZ

Solução da equação de estado homogênea

Considere a equação diferencial vetorial-matricial de um sistema autônomo (sem entradas)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{28}$$

onde $\mathbf{x} =$ é um vetor de ordem n, $\mathbf{A} =$ é uma matriz constante de ordem $n \times n$.

Em termos da matriz exponencial, a solução da Equação (28) pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{29}$$

Como a matriz exponencial é muito importante na análise por espaço de estados de sistemas lineares, a seguir examinaremos alguns métodos para resolvê-la.

Teorema de Cayley-Hamilton

O teorema de Cayley-Hamilton é bastante útil na prova de teoremas que envolvem equações matriciais ou soluciona problemas que envolvem equações matriciais.
Sabendo que a equação característica de uma matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ é dada por:

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

o teorema de Cayley-Hamilton estabelece que a matriz $\mathbf{A}$ satisfaz sua própria equação característica, ou seja:

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = 0 \tag{30}$$

Esse teorema pode ser usado para resolver qualquer função matricial, incluindo a exponencial de matriz, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo Cayley-Hamilton

Calcule a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

A equação característica de **A** é

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2.5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2.5\lambda + 1 = 0$$

Multiplicando ambos lados da equação por λ^{-1} tem-se

$$\lambda - 2.5 + \lambda^{-1} = 0 \Rightarrow \lambda^{-1} = 2.5 - \lambda$$

Usando Cayley-Hamilton e aplicando **A** à equação característica, tem-se

$$\mathbf{A}^{-1} = 2.5\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que equivale à inversa de **A**.

Função de matriz quadrada - Propriedade baseada em Cayley-Hamilton

Seja $f(\lambda)$ uma função polinomial no autovalor λ, então

$$f(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k, \qquad i = 1, \ldots, n$$

e pelo Teorema de Cayley-Hamilton

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{A}^k$$

Se os n autovalores de $\mathbf{A}$ forem distintos, teremos n equações em λ para determinar n coeficientes $(\alpha_k, k = 0, \ldots, n-1)$. No entanto, se nem todos autovalores de $\mathbf{A}$ forem distintos, possuiremos menos equações do que o necessário para computar os coeficientes α_k, nesse caso, pode-se fazer o uso das derivadas de $f(\lambda)$ com relação a λ.

Exemplo: Potência de matriz quadrada com autovalores distintos

Calcule a função $\mathbf{A}^4$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1.$$

Usando a propriedade do slide anterior:

$$\lambda^4 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda,\ \Rightarrow \begin{cases} 3^4 = \alpha_0 + \alpha_1 3 \\ 1^4 = \alpha_0 + \alpha_1 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81 = \alpha_0 + 3\alpha_1 \\ 1 = \alpha_0 + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 40, \\ \alpha_0 = -39 \end{matrix}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\mathbf{A}^4 = -39\mathbf{I} + 40\mathbf{A} = -39 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 40 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Potência de matriz quadrada com autovalores múltiplos

Calcule a função $\mathbf{A}^{10}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Solução:
Usando a propriedade:

$$\lambda^{10} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \qquad 10\lambda^9 = \alpha_1$$

Como $\lambda = 1$ isso implica em $\alpha_1 = 10$ e $\alpha_0 = -9$, e pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\mathbf{A}^{10} = -9\mathbf{I} + 10\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que equivale a $\mathbf{A}^{10}$.

Exemplo: Exponencial de matriz quadrada com autovalores distintos

Calcule a função $\exp(\mathbf{A}t)$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Sabendo que $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$, usando a propriedade, tem-se:

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \ \Rightarrow \begin{cases} e^{3t} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 3 \\ e^{t} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{e^{3t} - e^{t}}{2}, \\ \alpha_0 = \dfrac{3e^{t} - e^{3t}}{2} \end{array}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\exp(\mathbf{A}t) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{t} - e^{3t}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3e^{t} - e^{3t}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\left(\frac{e^{3t} - e^{t}}{2}\right) & 2\left(\frac{e^{3t} - e^{t}}{2}\right) \\ 0 & \frac{e^{3t} - e^{t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Exponencial de matriz quadrada com autovalores múltiplos

Calcule a função $\exp(\mathbf{A}t)$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Solução:
Usando a propriedade:

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda, \qquad te^{\lambda t} = \alpha_1$$

Como $\lambda = 1$ isso implica em $\alpha_1 = te^t$ e $\alpha_0 = (1-t)e^t$, e pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\exp(\mathbf{A}t) = (1-t)e^t\mathbf{I} + te^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^t - te^t & 0 \\ 0 & e^t - te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^t & 2te^t \\ 0 & te^t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Cálculo de e^{At} por diagonalização

Se a matriz $\mathbf{A}$ pode ser transformada na forma diagonal ($\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, em que $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal com os mesmos autovalores de $\mathbf{A}$), então $e^{\mathbf{A}t}$ pode ser dada por:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{32}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz de transformação que diagonaliza $\mathbf{A}$. No caso de $\mathbf{A}$ possuir apenas autovalores distintos e estiver escrita na forma canônica controlável, a matriz $\mathbf{P}$ que diagonaliza $\mathbf{A}$ é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por diagonalização

Por exemplo, considere a seguinte matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é:

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

Portanto, a matriz $\mathbf{A}$ tem um autovalor em $\lambda = -1$ e outro em $\lambda = 3$. A matriz de transformação que vai transformar a matriz $\mathbf{A}$ na forma diagonal pode ser dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz $\mathbf{P}$ é:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por diagonalização

Assim podemos encontrar $e^{\mathbf{A}t}$ a partir de $e^{\mathbf{D}t}$:

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.75e^{-t} + 0.25e^{3t} & -0.25e^{-t} + 0.25e^{3t} \\ -0.75e^{-t} + 0.75e^{3t} & 0.25e^{-t} + 0.75e^{3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por transformada de Laplace

Outro método de cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ é dado pela transformada inversa de Laplace como segue:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]$$

Então, para obter $e^{\mathbf{A}t}$, primeiro inverta a matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Isso resulta em uma matriz cujos elementos são funções racionais em s.
Então, considere a transformada inversa de Laplace de cada elemento da matriz.

Exemplo 9.7

Considere a seguinte matriz **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ usando 1) diagonalização e 2) transformada de Laplace.
Método 1. Os autovalores de **A** são 0 e -2 ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$). Uma matriz de transformação necessária **P** pode ser obtida como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Então, a partir da Equação (32), $e^{\mathbf{A}t}$ é obtida como segue:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0}t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Método 2. Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por Cayley-Hamilton

Caso 1: A possui autovalores distintos.

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \tag{33}$$

em que, por Cayley-Hamilton, os coeficientes $\alpha_k(t)$ para $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ podem ser determinado por meio da solução do seguinte conjunto de n equações para o $\alpha_k(t)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} &= e^{\lambda_2 t} \\
&\vdots \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t}
\end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ e possui autovalores distintos, então o número de $\alpha_k(t)$ a ser determinado é n.

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ por Cayley-Hamilton

Caso 2: o polinômio mínimo de A envolve raízes múltiplas.

Como um exemplo, considere o caso em que o polinômio mínimo de **A** possui três raízes iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) e possui outras raízes ($\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_n$), todas elas distintas. Assim como no caso 1:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \tag{34}$$

cujos coeficientes $\alpha_k(t)$ para ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) podem ser determinados por:

$$\begin{aligned}
\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t)\lambda_1 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\
\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} &= te^{\lambda_1 t} \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_4 + \alpha_2(t)\lambda_4^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_4^{n-1} &= e^{\lambda_4 t} \\
&\vdots \\
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2(t)\lambda_n^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t}
\end{aligned}$$

Observe que as últimas equações são idênticas às obtidas para o caso de autovalores distintos, no entanto, as equações relacionadas aos autovalores múltiplos são obtidas aplicando-se uma derivada de ordem $k = 1, \ldots, \ell - 1$ (em que ℓ é a multiplicidade) com relação ao autovalor múltiplo e dividindo-se por $k!$.

Exemplo 9.8

Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine $e^{\mathbf{A}t}$ utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton.

Solução:

Como a matriz $\mathbf{A}$ é triangular superior, os dois autovalores estão na diagonal principal: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$ e, portanto são distintos. Assim:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A}$$

em que $\alpha_0(t)$ e $\alpha_1(t)$ podem ser obtidos a partir de

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 = e^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 = e^{\lambda_2 t}$$

substituindo os autovalores, tem-se

$$\alpha_0(t) = 1$$
$$\alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) = e^{-2t}$$

Resolvendo para $\alpha_0(t)$ e $\alpha_1(t)$, temos:

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

Então, $e^{\mathbf{A}t}$ pode ser escrita como:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{A}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Solução das equações de estado não homogêneas

A equação de estado não homogênea (com entrada) descrita por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{35}$$

onde $\mathbf{x}$ =vetor n, $\mathbf{u}$ =vetor r, $\mathbf{A}$ = matriz constante $n \times n$, $\mathbf{B}$ = matriz constante $n \times r$ apresenta a seguinte solução

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{36}$$

que também pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{37}$$

onde $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$. A solução $\mathbf{x}(t)$ é claramente a soma de um termo que consiste na transição do estado inicial (solução da equação homogênea) e de um termo proveniente do vetor de entrada.

Exemplo 9.6

Obtenha a resposta temporal do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário que ocorre em $t = 0$, ou

$$u(t) = 1(t)$$

Para esse sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transição de estado $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ pode ser obtida por algum dos métodos apresentados, obtendo-se:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.6

A resposta ao degrau unitário é, então, obtida como:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] d\tau$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Se o estado inicial for nulo, ou $\mathbf{x}(0) = 0$, então $\mathbf{x}(t)$ poderá ser simplificada para:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

CONTROLABILIDADE, OBSERVABILIDADE, ESTABILIZABILIDADE E DETECTABILIDADE

Controlabilidade completa de estado de sistemas de tempo contínuo

Considere o sistema de tempo contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{38}$$

Definição: Controlabilidade

O sistema descrito pela Equação (38) será dito de estado controlável em $t = t_0$ se for possível construir um sinal de controle não limitado que transfira o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo estado for controlável, então o sistema será considerado de estado completamente controlável.

Se o sistema for de estado completamente controlável, então, dado qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$, o posto (número de linhas ou colunas linearmente independentes) da matriz de controlabilidade

$$Ctrb(A,B) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array}\right]$$

deve ser n (n vetores-coluna linearmente independentes). No caso de sistemas com única entrada, a matriz de controlabilidade é quadrada e o teste é equivalente a verificar se o determinante da matriz de controlabilidade **é não nulo**! $(det(Ctrb(A,B)) \neq 0)$

Exemplos Controlabilidade

Exemplo 9.10. Considere o sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Como

$$Ctrb(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(Ctrb(\mathbf{A},\mathbf{B})) = 0,$$

o sistema não é de estado completamente controlável.

Exemplo 9.11. Considere o sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Para esse caso,

$$Ctrb(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(Ctrb(\mathbf{A},\mathbf{B})) \neq 0,$$

O sistema é, portanto, de estado completamente controlável.

Se o sistema (38) estiver na forma de Jordan, ele é de estado completamente controlável se, e somente se,

(1) não houver dois blocos de Jordan na matriz $\mathbf{J}$ associados ao mesmo autovalor,

(2) os elementos de qualquer linha de $\mathbf{B}$ equivalente que correspondem à última linha de cada bloco de Jordan não forem todos nulos, e

(3) os elementos de cada linha da matriz $\mathbf{B}$ equivalente que correspondem a autovalores distintos não forem todos nulos.

Exemplo 9.12

Os seguintes sistemas são de estado completamente controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.12

Os seguintes sistemas não são de estado completamente controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Sistema não controlável e estabilizabilidade

Definição: Estabilizabilidade

Para sistemas parcialmente controláveis, se os modos não controláveis forem estáveis e os modos instáveis forem controláveis, o sistema será considerado estabilizável.

Por exemplo, o sistema definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

não é de estado controlável. O modo estável que corresponde ao autovalor -1 não é controlável. O modo instável que corresponde ao autovalor 1 é controlável. Esse sistema pode ser feito estável pelo uso de uma realimentação apropriada. Assim, o sistema é estabilizável.

Observabilidade

Considere o sistema sem excitação (entrada $\mathbf{u}$ nula) descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{39}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{40}$$

Definição: Observabilidade

O sistema será considerado completamente observável se todo estado $\mathbf{x}(t_0)$ puder ser determinado pela observação de $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$.

- O sistema é, portanto, completamente observável se cada transição do estado puder afetar cada elemento do vetor de saída.
- O conceito de observabilidade é útil na solução de problemas de reconstrução de variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis, no menor intervalo possível de tempo.
- O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com o controle por realimentação de estado é que algumas das variáveis de estado não são acessíveis por medição direta, resultando ser necessário estimar a variável de estado não mensurável para construir os sinais de controle.
- É possível demonstrar que essas estimativas das variáveis de estado são possíveis se e somente se o sistema for completamente observável.

Observabilidade completa de sistemas de tempo contínuo

Se o sistema é completamente observável, então, dada a saída $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$, $\mathbf{x}(t)$ pode ser sempre determinado apenas se o posto da matriz de observabilidade

$$Obsv(\mathbf{A},\mathbf{C}) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CA} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{CA}^{n-1} \end{array}\right]$$

for n, ou seja, tiver n vetores-coluna linearmente independentes. No caso de uma única saída, a matriz de observabilidade é quadrada e o teste é equivalente a verificar se o determinante da matriz de observabilidade dada acima **é não nulo!** $(\det(Obsv(\mathbf{A},\mathbf{C})) \neq 0)$.

Exemplo 9.14

Considere o sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é controlável e observável?

Solução:

Uma vez que o posto da matriz

$$Ctrb(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left[\ \mathbf{B} \mid \mathbf{AB}\ \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é 2, ou seja, $\det(Ctrb(\mathbf{A},\mathbf{B})) \neq 0)$ o sistema é de estado completamente controlável. Para testar a condição de observabilidade, examine o posto da matriz de observabilidade:

$$Obsv(\mathbf{A},\mathbf{C}) = \left[\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{CA}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

o posto de $Obsv(\mathbf{A},\mathbf{C})$ é 2, visto que o determinante é não nulo ($det(Obsv(\mathbf{A},\mathbf{C})) = 1 \neq 0$). Como consequências, o sistema é completamente observável.

Controlabilidade, Observabilidade e Função de Transferência

- A função de transferência não possui cancelamentos se e somente se o sistema for de estado completamente controlável e observável.
- Isso significa que a função de transferência que possui cancelamentos não carrega toda a informação que caracteriza a dinâmica do sistema.

Observabilidade e Forma de Jordan

Caso o sistemas (39),(40) estiver na forma de Jordan, podemos verificar se é completamente observável quando satisfaz as seguintes condições:

(1) não houver dois blocos de Jordan na matriz $\mathbf{J}$ associados aos mesmos autovalores,

(2) não houver colunas de $\mathbf{C}$ correspondentes à primeira coluna de cada bloco de Jordan, que são constituídas por elementos nulos, e

(3) não houver colunas de $\mathbf{C}$ correspondentes a autovalores distintos, que são formados por elementos nulos.

Exemplo 9.16

Os seguintes sistemas são completamente observáveis.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.16

Os seguintes sistemas não são completamente observáveis.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Detectabilidade

Definição: Detectabilidade

Para um sistema parcialmente observável, se os modos não observáveis forem estáveis e os modos observáveis forem instáveis, o sistema será considerado detectável. Note que o conceito de detectabilidade é dual ao conceito de estabilizabilidade.

Exemplo:

Classifique o seguinte sistema como controlável, não controlável ou estabilizável, e observável, não observável ou detectável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Ogata, Katsuhiko "Engenharia de Controle Moderno". 5ª edição, Pearson, 2010. ISBN: 9788576058106:
  - **Capítulo 2** – Modelagem matemática de sistemas de controle;
  - **Capítulo 9** – Análise de sistemas de controle no espaço de estados.