

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 4.2: Controladores PID: Aspectos de implementação dos controladores PID

Professora: Cecília de Freitas Moraes
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Aspectos de implementação dos controladores PID

- O controlador PID, na forma apresentada na aula anterior, apresenta alguns inconvenientes associados à aplicação prática.
- Nesta aula são consideradas algumas técnicas consagradas na implementação de controladores PID que visam contornar esses inconvenientes.

Implementação do termo derivador

- Conforme citado na aula passada, o termo associado à derivada no controlador PID produz um ganho que tende ao infinito em frequências altas. Como nas aplicações de controle a presença de ruídos é inevitável, esses ganhos altos levam à saturação os elementos finais de controle como, por exemplo, amplificadores e atuadores.
- De forma a contornar esse problema, a função de transferência do controlador PID é usualmente modificada, acrescentando-se um filtro passa-baixas ao termo associado à derivada, que resulta como

$$PID(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{NT_D s + 1} \right), \quad (1)$$

sendo N um parâmetro tipicamente adotado entre 0,05 e 0,17.

- No caso do controlador PD, cuja função de transferência original é

$$PD(s) = K_c (1 + T_D s), \quad (2)$$

a inclusão do filtro passa-baixas resulta na função de transferência modificada

$$PD(s) = K_c \left(1 + \frac{T_D s}{NT_D s + 1} \right) = K_c \left[\frac{(NT_D + T_D) s + 1}{NT_D s + 1} \right]. \quad (3)$$

Implementação do termo derivador

Na Figura 6.20 são mostrados os gráficos de Bode do módulo do controlador PD na forma original (2) e na forma modificada (3), incluindo o filtro passa-baixas. Fica evidente o efeito de atenuação do ganho em frequências altas a partir da frequência $\omega = \frac{1}{NT_D}$.

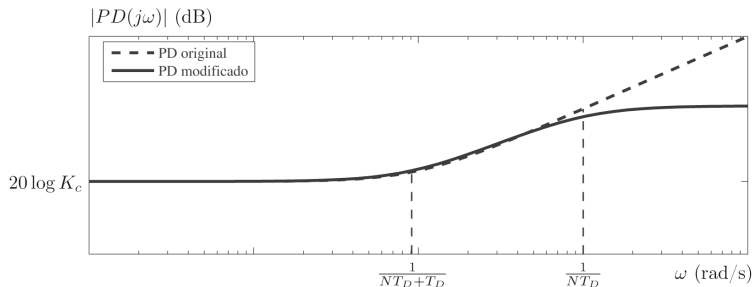


Figura 6.20 Diagramas de Bode do módulo do PD original e do PD modificado com a inclusão do filtro passa-baixas.

Implementação sem derivada do erro

Nos problemas de regulação da saída da planta, em que o sinal de referência é mantido em níveis constantes, a derivada do erro pode produzir picos nos amplificadores e atuadores quando se muda o nível do sinal de referências. Nesta operação, ao se aplicar um sinal do tipo degrau na referência ocorre também um degrau no sinal de erro, e o termo derivador, por sua vez, produz picos na saída do controlador. Em vez de calcular a derivada do erro, como na equação

$$\begin{aligned} M(s) &= \left(K_c + \frac{K_c}{T_I s} + K_c T_D s \right) E(s) \\ &= \left(K_c + \frac{K_c}{T_I s} \right) E(s) + K_c T_D s [R(s) - Y(s)], \end{aligned} \quad (4)$$

uma solução é implementar a derivada apenas como realimentação do sinal de saída da planta, ou seja,

$$M(s) = \left(K_c + \frac{K_c}{T_I s} \right) E(s) - (K_c T_D s) Y(s) = PI(s)E(s) - D(s)Y(s). \quad (5)$$

Implementação sem derivada do erro

O diagrama de blocos desta implementação é apresentado na Figura 6.21. Note que os sinais de controle $M(s)$, produzidos pelas Equações (4) e (5), são idênticos a menos do instante em que ocorre o degrau no sinal de referência.

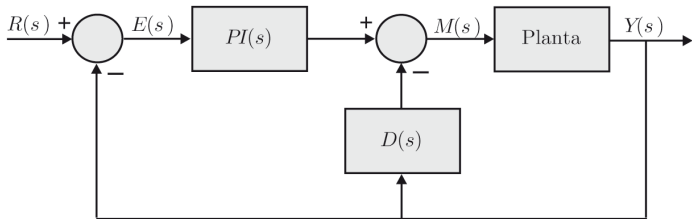


Figura 6.21 Diagrama de blocos do sistema de controle sem derivada do erro.

Implementação digital do controlador PID

Diz-se que um computador opera em tempo real quando é capaz de aceitar medidas digitais no instante k , executar operações lógicas e cálculos pré-estabelecidos e apresentar os resultados no instante $k + \tau$, $\tau > 0$.

Qualquer computador operando em tempo real pode implementar um controlador PID executando a equação de diferenças finita que se aproxime da equação diferencial do algoritmo PID. Considerando o controlador PID sem a derivada do erro

$$M(s) = K_c \left(E(s) + \frac{1}{T_I s} E(s) - T_D s Y(s) \right), \quad (6)$$

a equação diferencial correspondente é

$$m(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_D \frac{dy(t)}{dt} \right). \quad (7)$$

Supondo, como é frequente, que o tempo de cálculo τ é muito menor que o tempo T entre as interações com o processo controlado pode-se adotar como algoritmo PID digital

$$m(kT) \cong K_c \left(e(kT) + \frac{1}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT) T - T_D \frac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T} \right), \quad (8)$$

que é chamada forma de posição, pois requer o cálculo do valor pleno de $m(kT)$ a cada passo.

Implementação digital do controlador PID

A chamada forma de velocidade, que calcula apenas o incremento $\Delta m(kT)$ a cada passo, é

$$\Delta m(kT) = m(kT) - m[(k-1)T] \quad \text{ou} \quad (9)$$

$$\Delta m(kT) \cong K_c \left(e(kT) - e[(k-1)T] + \frac{1}{T_i} e(kT) T - T_D \frac{y(kT) - 2y[(k-1)T] + y[(k-2)T]}{T} \right). \quad (10)$$

Essa forma exige um integrador adicional para reconstruir $m(kT)$ a partir de $\Delta m(kT)$, pois

$$m(kT) = m[(k-1)T] + \Delta m(kT) = \sum_{i=0}^k \Delta m(iT) \quad (11)$$

e tem a vantagem de que, na hipótese de uma falha do computador ou de uma interrupção por emergência, no retorno ao funcionamento a variável $m(kT)$ se encontrará no último valor válido, e não em zero. A forma de velocidade é de fato a forma preferida.

Implementação analógica do controlador PID

Com o avanço tecnológico dos computadores e dos equipamentos de processamento digital de sinais a implementação de controladores na forma digital está sendo cada vez mais utilizada na prática.

Algumas vantagens da implementação digital sobre a analógica são:

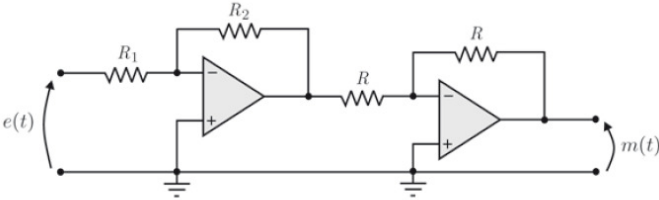
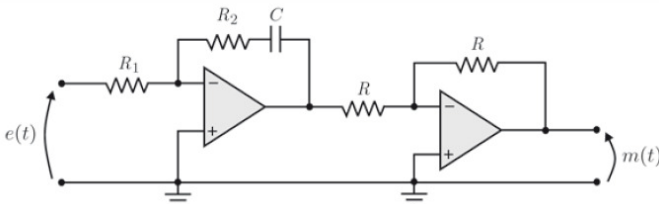
- maior precisão dos cálculos¹,
- implementação mais simples por meio de um programa computacional,
- fácil programação menor interferência de ruído,
- maior grau de integração e compactação entre outras.

A única vantagem da implementação analógica é que como os processos em geral são analógicos não é necessário realizar a conversão digital. Apesar disso, muitas indústrias utilizam até hoje controladores que foram implementados analogicamente.

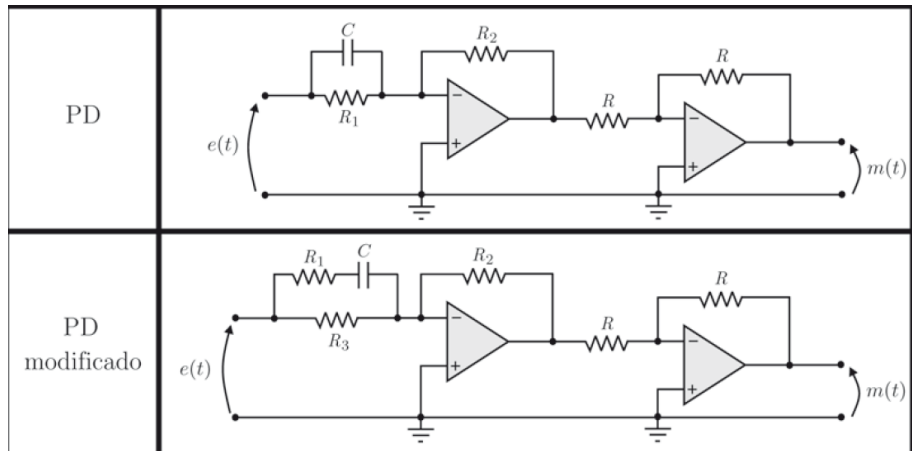
¹A precisão dos cálculos analógicos depende da precisão limitada de componentes eletrônicos, enquanto a precisão dos cálculos digitais depende da quantidade de circuitos de chaveamento.

Implementação analógica do controlador PID

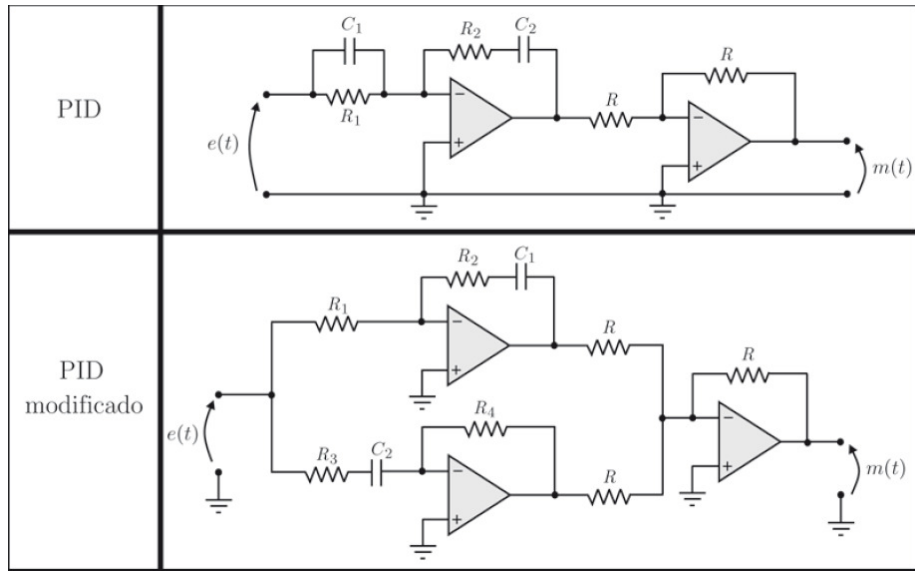
Nas figuras seguintes são apresentados os circuitos eletrônicos com amplificadores operacionais de alguns controladores.

P	 <p>The diagram shows a two-stage op-amp circuit. The first stage is an inverting amplifier with input resistor R_1 and feedback resistor R_2. The input is $e(t)$ and the output is connected to the input of the second stage. The second stage is also an inverting amplifier with input resistor R and feedback resistor R. The output of the second stage is $m(t)$. Both op-amps have their non-inverting inputs (+) connected to ground.</p>
PI	 <p>The diagram shows a two-stage op-amp circuit. The first stage is an inverting amplifier with input resistor R_1 and a feedback network consisting of a resistor R_2 in series with a capacitor C. The input is $e(t)$ and the output is connected to the input of the second stage. The second stage is an inverting amplifier with input resistor R and feedback resistor R. The output of the second stage is $m(t)$. Both op-amps have their non-inverting inputs (+) connected to ground.</p>

Implementação analógica do controlador PID



Implementação analógica do controlador PID



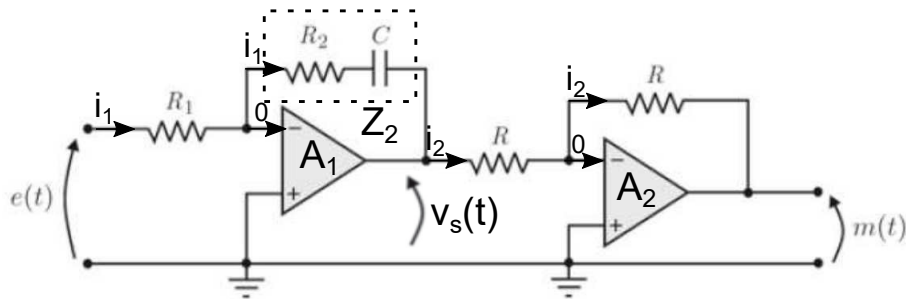
Implementação analógica do controlador PID

Na Tabela abaixo são apresentadas as correspondentes funções de transferência.

Controlador	$\frac{M(s)}{E(s)}$	K_c	T_I	T_D	N
P	K_c	$\frac{R_2}{R_1}$	–	–	–
PI	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$	$\frac{R_2}{R_1}$	$R_2 C$	–	–
PD	$K_c (1 + T_D s)$	$\frac{R_2}{R_1}$	–	$R_1 C$	–
PD modificado	$K_c \left(1 + \frac{T_D s}{NT_D s + 1}\right)$	$\frac{R_2}{R_3}$	–	$R_3 C$	$\frac{R_1}{R_3}$
PID	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$	$\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2}$	$R_1 C_1 + R_2 C_2$	$\frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$	–
PID modificado	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{NT_D s + 1}\right)$	$\frac{R_2}{R_1}$	$R_2 C_1$	$\frac{R_1 R_4 C_2}{R_2}$	$\frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}$

Exemplo de Implementação analógica PI

Determine a função de transferência ($M(s)/E(s)$) e os parâmetros da função de transferência (K_c e T_I) de um controlador PI implementado da seguinte forma:



Observe que acima temos dois amplificadores ligados no modo inversor, como $v_+(t) = v_-(t)$ e $v_+(t) = 0$ pois está ligada ao terra, então $v_-(t) = 0$ é um terra virtual. Além disso, devido à alta impedância de entrada, a corrente na entrada do amplificador é nula, portanto toda corrente $i_1(t)$ que passa por R_1 , também passa por Z_2 , assim como toda corrente $i_2(t)$ que passa por R na entrada do amplificador A_2 também passa por R sobre o amplificador A_2 .

Exemplo de Implementação analógica PI

A impedância $Z_2(s)$ vale

$$Z_2(s) = \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right) = \frac{R_2 Cs + 1}{sC}$$

A transformada de Laplace da corrente $i_1(t)$ vale

$$I_1(s) = \frac{E(s) - \cancel{V_-(s)} \overset{0}{\rightarrow}}{R_1} = \frac{E(s)}{R_1} \quad \text{ou} \quad I_1(s) = \frac{\cancel{V_-(s)} \overset{0}{\rightarrow} V_s(s)}{Z_2(s)} = -\frac{V_s(s)}{Z_2(s)}$$

igualando as duas expressões, tem-se a função de transferência de $e(t)$ para $v_s(t)$:

$$\frac{E(s)}{R_1} = -\frac{V_s(s)}{Z_2(s)} \Rightarrow V_s(s) = -\frac{Z_2(s)}{R_1} E(s). \quad (12)$$

Exemplo de Implementação analógica PI

No segundo amplificador, a transformada de Laplace da corrente $i_2(t)$ vale

$$I_2(s) = \frac{V_s(s) - \cancel{V(s)}^0}{R} = \frac{V_s(s)}{R} \quad \text{ou} \quad I_2(s) = \frac{\cancel{V(s)}^0 M(s)}{R} = -\frac{M(s)}{R}$$

igualando as duas expressões, tem-se que $M(s) = -V(s)$ e da Equação (13):

$$M(s) = -V_s(s) = -\left(-\frac{Z_2(s)}{R_1}\right) E(s) = \frac{Z_2(s)}{R_1} E(s),$$

ou seja, a função de transferência desse controlador PI é:

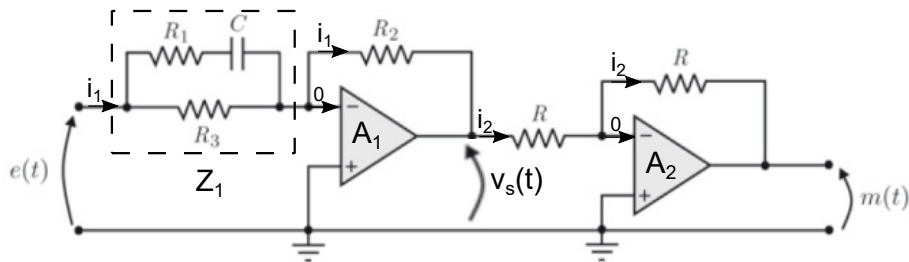
$$\begin{aligned} \frac{M(s)}{E(s)} &= \frac{Z_2(s)}{R_1} = \frac{R_2 Cs + 1}{sC} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{R_2 Cs + 1}{R_1 Cs} = \frac{1}{R_1 C} \left(\frac{R_2 Cs + 1}{s} \right) \\ &= K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K_c}{T_I} \left(\frac{T_I s + 1}{s} \right) \end{aligned}$$

com

$$T_I = R_2 C \quad \text{e} \quad \frac{K_c}{T_I} = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow K_c = \frac{T_I}{R_1 C} = \frac{R_2 \cancel{C}}{R_1 \cancel{C}} = \frac{R_2}{R_1}$$

Exemplo de Implementação analógica PD modificado

Determine a função de transferência ($M(s)/E(s)$) e os parâmetros da função de transferência (K_c , N e T_D) de um controlador PD modificado implementado da seguinte forma:



Observe que acima temos dois amplificadores ligados no modo inversor, como $v_+(t) = v_-(t)$ e $v_+(t) = 0$ pois está ligada ao terra, então $v_-(t) = 0$ é um terra virtual. Além disso, devido à alta impedância de entrada, a corrente na entrada do amplificador é nula, portanto toda corrente $i_1(t)$ que passa por Z_1 , também passa por R_2 , assim como toda corrente $i_2(t)$ que passa por R na entrada do amplificador A_2 também passa por R sobre o amplificador A_2 .

Exemplo de Implementação analógica PD modificado

A impedância $Z_1(s)$ vale

$$Z_1(s) = \frac{\left(R_1 + \frac{1}{sC}\right) R_3}{R_1 + \frac{1}{sC} + R_3} = \frac{\left(\frac{R_1 Cs + 1}{\cancel{sC}}\right) R_3}{\frac{(R_1 + R_3)Cs + 1}{\cancel{sC}}} = \frac{(R_1 Cs + 1)R_3}{(R_1 + R_3)Cs + 1}$$

A transformada de Laplace da corrente $i_1(t)$ vale

$$I_1(s) = \frac{E(s) - \cancel{V_s(s)} \overset{0}{\rightarrow}}{Z_1(s)} = \frac{E(s)}{Z_1(s)} \quad \text{ou} \quad I_1(s) = \frac{\cancel{V_s(s)} \overset{0}{\rightarrow} V_s(s)}{R_2} = -\frac{V_s(s)}{R_2}$$

igualando as duas expressões, tem-se a função de transferência de $e(t)$ para $v_s(t)$:

$$\frac{E(s)}{Z_1(s)} = -\frac{V_s(s)}{R_2} \Rightarrow V_s(s) = -\frac{R_2}{Z_1(s)} E(s). \quad (13)$$

Exemplo de Implementação analógica PD modificado

No segundo amplificador, a transformada de Laplace da corrente $i_2(t)$ vale

$$I_2(s) = \frac{V_s(s) - \cancel{V(s)}^0}{R} = \frac{V_s(s)}{R} \quad \text{ou} \quad I_2(s) = \frac{\cancel{V(s)}^0 M(s)}{R} = -\frac{M(s)}{R}$$

igualando as duas expressões, tem-se que $M(s) = -V(s)$ e da Equação (13):

$$M(s) = -V_s(s) = -\left(-\frac{R_2}{Z_1(s)}\right) E(s) = \frac{R_2}{Z_1(s)} E(s),$$

ou seja, a função de transferência desse controlador PD modificado é:

$$\begin{aligned} \frac{M(s)}{E(s)} &= \frac{R_2}{Z_1(s)} = R_2 \cdot \frac{(R_1 + R_3)Cs + 1}{(R_1Cs + 1)R_3} = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{(R_1C + R_3C)s + 1}{R_1Cs + 1} \\ &= K_c \left(1 + \frac{T_D s}{NT_D s + 1}\right) = K_c \left(\frac{(NT_D + T_D)s + 1}{NT_D s + 1}\right) \end{aligned}$$

com

$$K_c = \frac{R_2}{R_3}, \quad NT_D = R_1C \quad \text{e} \quad \cancel{NT_D} + T_D = \cancel{R_1C} + R_3C$$

$$\Rightarrow T_D = R_3C \quad \text{e} \quad N = \frac{R_1C}{T_D} = \frac{R_1\cancel{C}}{R_3\cancel{C}} = \frac{R_1}{R_3}$$

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018.
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 6.**