

# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

## Parte 4.1: Controladores PID – Introdução e função de transferência

**Professora:** Cecília de Freitas Morais

**Auxiliar didático (PED):** Artêmio Andrade Barros

e-mails: [cfmoraes@unicamp.br](mailto:cfmoraes@unicamp.br)

[a242988@dac.unicamp.br](mailto:a242988@dac.unicamp.br)

página: <https://cfmoraes.fee.unicamp.br/>

# Controladores PID: Introdução

- Apesar de ao longo das últimas décadas, teorias matemáticas dedicadas ao controle ótimo e ao controle robusto terem produzido importantes resultados (indispensáveis nas aplicações aeronáuticas, aeroespaciais e similares), algumas arquiteturas especiais utilizando algoritmos clássicos, chamados de PID têm demonstrado notável eficácia e praticidade no controle dos processos industriais.
- Esses controladores PID, ainda mais quando inseridos nos computadores industriais e nos controladores lógicos programáveis (CLPs), mantêm-se como um dos principais equipamentos de controle.
- O nome PID deriva do fato de que sua função de transferência contém a soma das ações: Proporcional, Integradora e Derivadora.
- Seus parâmetros são de fácil ajuste e sua construção é adequadamente robusta para o ambiente industrial.
- O sucesso do controlador PID também decorreu de uma bem-sucedida padronização, na sua versão eletrônica, desde 1950.

# A função de transferência do controlador PID

O modelo matemático de um controlador PID, conforme o padrão ISA (*International Society of Automation*), é dado por

$$m(t) = K_c \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

sendo:

- $m(t)$ : sinal de saída do controlador, chamado de variável manipulada;
- $e(t)$ : sinal de entrada do controlador, chamado de erro atuante;
- $K_c$ ,  $T_I$  e  $T_D$ : parâmetros de ajuste do controlador.

As três parcelas do controlador PID correspondem aos efeitos Proporcional, Integrador e Derivador do sinal de erro atuante. Note que neste modelo os coeficientes de cada parcela são independentes ( $K_c$ ,  $K_c/T_I$  e  $K_c T_D$ ).

Tradicionalmente é utilizada a seguinte denominação, relativa aos parâmetros de ajuste do controlador PID:

- $K_c$ : ganho proporcional;
- $K_c/T_I$ : ganho da integral (*reset gain*);
- $K_c T_D$ : ganho da derivada (*rate gain*).

## A função de transferência do controlador PID

A função de transferência correspondente ao modelo da Equação (1) é

$$PID(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (2)$$

$$= K_c + \frac{K_c}{T_I s} + K_c T_D s \quad (3)$$

$$= \frac{K_c T_I T_D s^2 + K_c T_I s + K_c}{T_I s}, \quad (4)$$

ou seja, o controlador  $PID(s)$  possui um polo na origem e dois zeros reais ou complexos conjugados em

$$s_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I^2 - 4 T_I T_D}}{2 T_I T_D}. \quad (5)$$

## A função de transferência do controlador PID

Os controladores PID também são muito empregados com efeitos parciais:

- PI (Proporcional mais Integrador) para o qual se adota  $T_D = 0$ . Neste caso tem-se a função de transferência

$$PI(s) = K_c + \frac{K_c}{T_I s} = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K_c (T_I s + 1)}{T_I s}, \quad (6)$$

que apresenta um zero real em  $-1/T_I$  e um polo na origem.

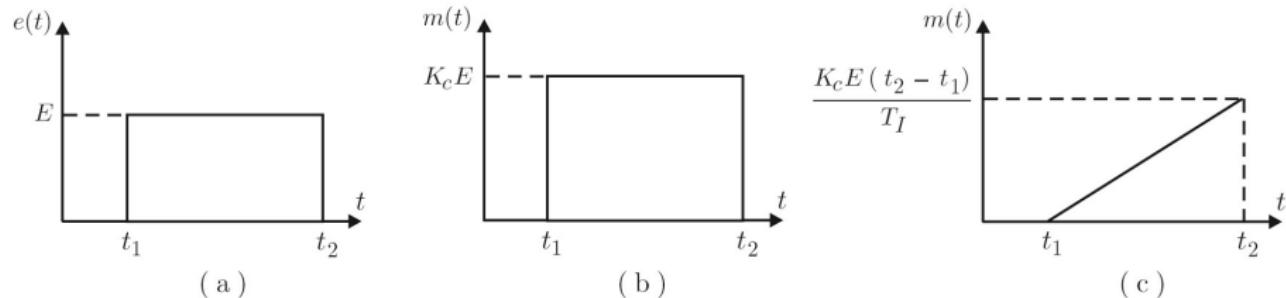
- PD (Proporcional mais Derivador) para o qual se adota  $T_I \rightarrow \infty$ . Neste caso tem-se

$$PD(s) = K_c + K_c T_D s = K_c (1 + T_D s), \quad (7)$$

que apresenta um zero real em  $-1/T_D$ .

# Efeito temporal das parcelas do PID

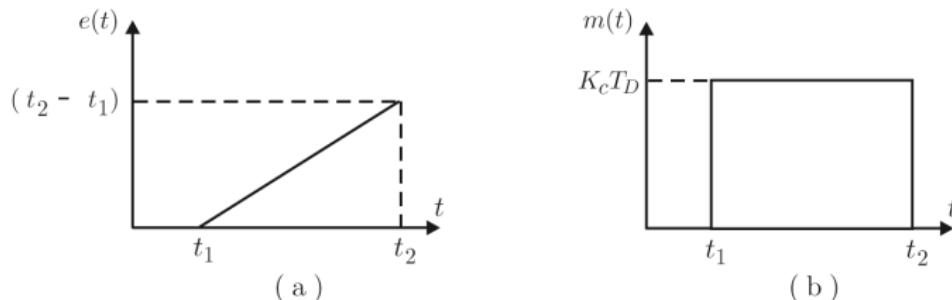
É útil analisar separadamente o efeito temporal de cada uma das três parcelas. Os efeitos dos termos proporcional e integral são mostrados na Figura 6.1, supondo um sinal de erro atuante do tipo pulso, de amplitude  $E$ .



**Figura 6.1** (a) Sinal de erro atuante de amplitude  $E$ . (b) Sinal gerado pela ação proporcional. (c) Sinal gerado pela ação integral.

# Efeito temporal das parcelas do PID

O sinal do tipo pulso, utilizado para analisar o efeito das ações proporcional e integral, não é adequado para a análise do efeito correspondente à derivada devido às descontinuidades no início e no final do sinal. Assim, na Figura 6.2 utiliza-se uma rampa unitária como sinal de erro atuante para mostrar o efeito da derivada no controlador PID.



**Figura 6.2** (a) Sinal de erro atuante (rampa unitária). (b) Sinal gerado pela ação derivadora.

# Resposta em frequência do controlador PID

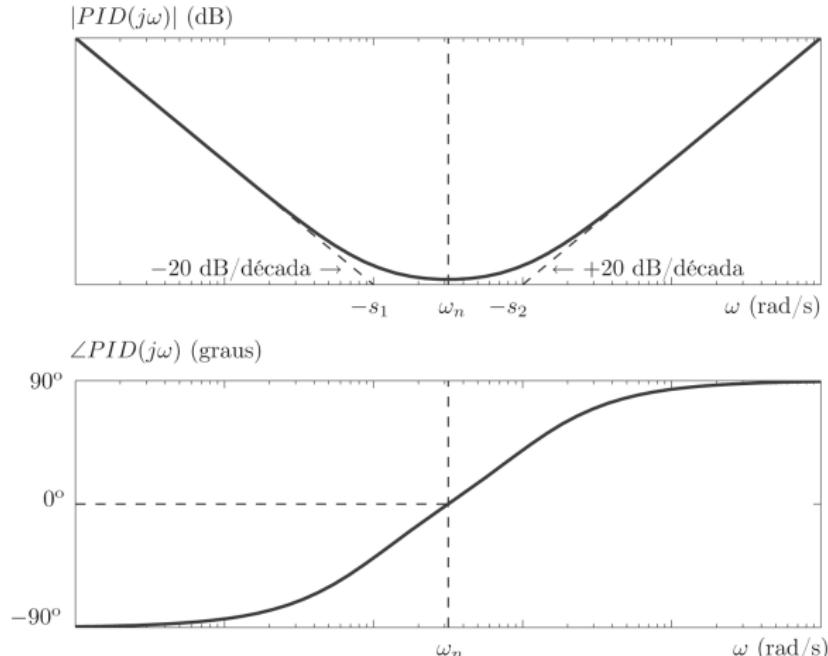


Figura 6.3 Diagramas de Bode do controlador PID com zeros reais  $s_1 \neq s_2$ .

Para obter o aspecto geral dos gráficos de Bode do controlador PID na Figura 6.3, considere a situação em que os zeros  $s_1$  e  $s_2$  do controlador são reais, com ( $s_1 \neq s_2$ ). Para isso, da Equação (5) deve-se ter  $T_I^2 - 4T_I T_D > 0$ . O gráfico do módulo possui em baixas frequências uma declividade de  $-20\text{dB/década}$ , com predomínio da ação integradora e, em altas frequências possui uma declividade de  $+20\text{dB/década}$ , com predomínio da ação derivadora. A defasagem varia de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ .

## Resposta em frequência do controlador PID

- Como importantes características do controlador PID no domínio da frequência deve-se destacar o ganho tendendo a infinito em baixas frequências, cuja função é reduzir o erro estacionário, e o avanço de fase acima da frequência  $\omega_n$ , cuja propriedade é melhorar a estabilidade relativa do sistema.
- Normalmente procura-se ajustar os parâmetros do controlador PID de forma que o atraso de fase produzido pelo termo integrador ocorra em frequências baixas, de forma a não afetar a estabilidade relativa do sistema.
- Os gráficos de Bode dos controladores PI e PD são muito mais simples, como mostrado nas Figuras 6.4 e 6.5 nos slides seguintes.

# Resposta em frequência do controlador PI

O gráfico do módulo do controlador PI ( $\frac{K_c (T_I s + 1)}{s}$ ) troca de declividade de  $-20\text{dB/década}$  para 0 na frequência  $1/T_I$  e, como o controlador PID, produz ganhos elevados em baixas frequências, que reduzem o erro estacionário. Porém o atraso de fase do controlador PI piora a estabilidade relativa do sistema.

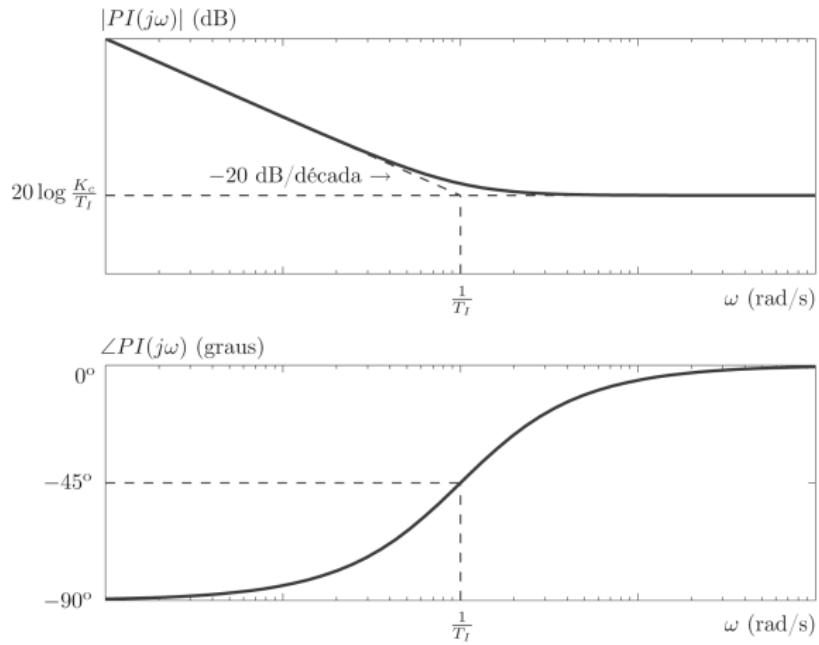


Figura 6.4 Diagramas de Bode do controlador PI com zero real em  $s = -\frac{1}{T_I}$ .

# Resposta em frequência do controlador PD

Já no caso do controlador PD ( $K_c(1 + T_D s)$ ), a declividade passa de 0 para  $+20\text{dB/década}$  na frequência  $1/T_D$  e produz um avanço de fase, cuja função é melhorar a estabilidade relativa do sistema.

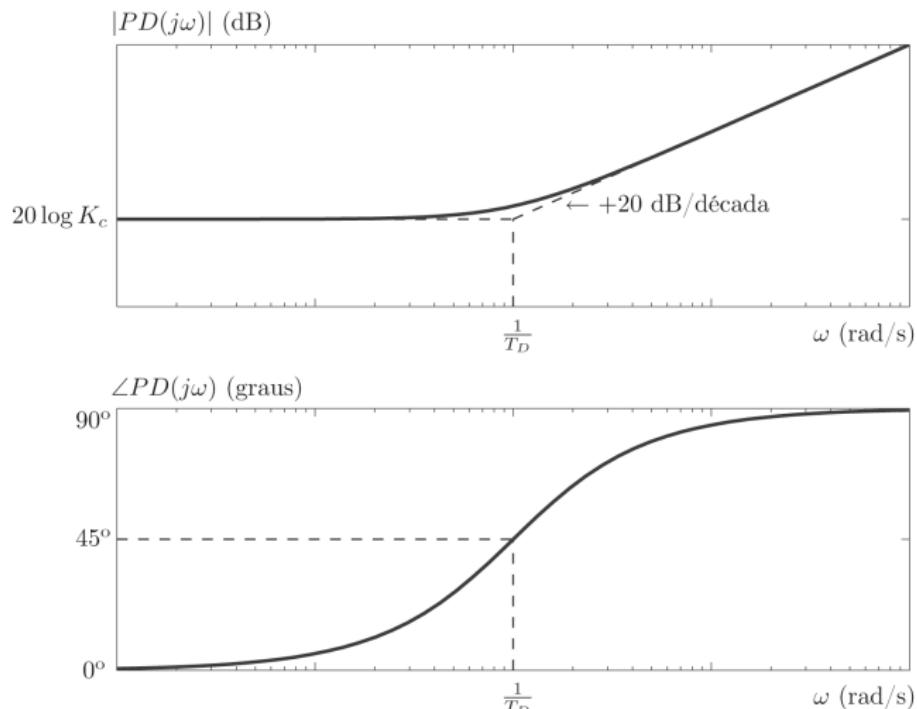


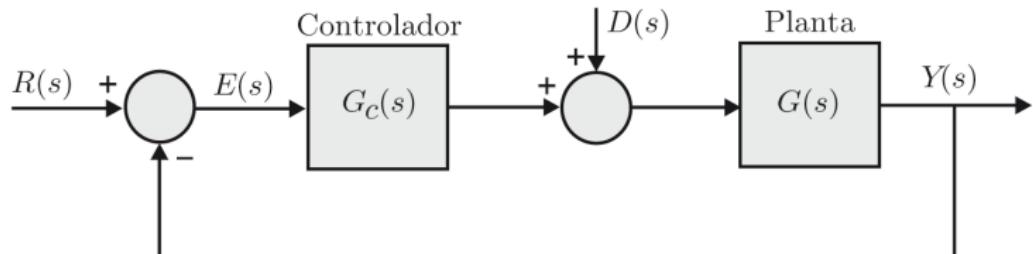
Figura 6.5 Diagramas de Bode do controlador PD com zero real em  $s = -\frac{1}{T_D}$ .

## A função de transferência do controlador PID

- É interessante observar que os gráficos de Bode do controlador PID da Figura 6.3 diferem dos gráficos do controlador por avanço e atraso de fase. Embora pretendam ter o mesmo efeito estabilizante, o gráfico do módulo do PID, em teoria, tem ganhos tendendo ao infinito tanto em frequências muito baixas como em frequências muito altas.
- Para limitar o ganho em altas frequências deve-se ressaltar que, na prática, é comum a adição de uma parcela atenuadora, que consiste na inclusão de um polo de alta frequência na função de transferência do controlador (veja Implementação do termo derivador na próxima aula).
- Dada a simplicidade das funções de transferência dos controladores PI e PD, é comum a determinação dos parâmetros correspondentes utilizando-se o método do lugar das raízes, seguida de uma análise das margens de estabilidade por meio dos gráficos de Bode.
- Já para os controladores PID as técnicas de ajuste mais frequentes baseiam-se em regras heurísticas (veja as técnicas de ajuste de Ziegler-Nichols, que serão apresentadas nas próximas aulas).

## Exemplo 6.1

Considere o diagrama de blocos da Figura 6.6.



**Figura 6.6** Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

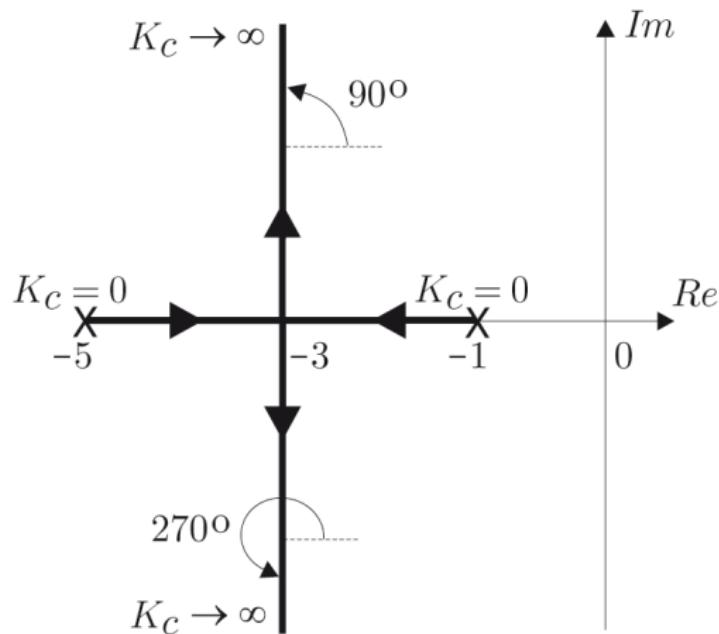
Sendo a função de transferência da planta

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}, \quad (8)$$

deseja-se analisar o comportamento deste sistema com os controladores  $P$ ,  $PI$ ,  $PD$ ,  $PID$ .

## Exemplo 6.1: Controlador P

Para  $G_c(s) = K_c$  o diagrama do lugar das raízes é apresentado na Figura 6.7.



**Figura 6.7** Lugar das raízes com o controlador P.

## Exemplo 6.1: Controlador P

Para  $s = -3$  os polos de malha fechada são reais e iguais (ponto de cruzamento das assíntotas:  $S_c = \frac{\sum(\text{polos}) - \sum(\text{zeros})}{2} = \frac{-5 + (-1)}{2} = -3$ ). Neste ponto o ganho vale

$$|G(s = -3)| = \left( \frac{K_c}{|s + 1||s + 5|} \right)_{s=-3} = 1$$
$$K_c = (|s + 1||s + 5|)_{s=-3} = |-2||2| = 4. \quad (9)$$

Portanto:

- para  $0 < K_c \leq 4$  os polos de malha fechada são reais e a resposta ao degrau na referência é amortecida;
- para  $K_c > 4$  os polos de malha fechada são complexos conjugados e a resposta ao degrau na referência é subamortecida (pois a parte real dos polos será negativa).

## Exemplo 6.1: Controlador P

A transformada de Laplace do Erro  $E(s)$  pode ser escrita em termos das entradas de referência  $R(s)$  e de perturbação  $D(s)$ :

$$\begin{aligned}E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - (E(s)G_c(s)G(s) + D(s)G(s)) \\ \Rightarrow (1 + G_c(s)G(s))E(s) &= R(s) - G(s)D(s) \\ \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}D(s)\end{aligned}$$

No caso de um controle proporcional ( $G_c(s) = K_c$ ), tem-se

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_c G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + K_c G(s)}D(s). \quad (10)$$

## Exemplo 6.1: Controlador P

Para entradas do tipo degrau unitário ( $R(s) = D(s) = \frac{1}{s}$ ), o erro estacionário pode ser calculado por meio do teorema do valor final:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + \frac{K_c}{(s+1)(s+5)}} - \frac{\frac{1}{(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{K_c}{(s+1)(s+5)}} \right) \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{(s+1)(s+5)}{(s+1)(s+5) + K_c} - \frac{1}{(s+1)(s+5) + K_c} \right) \\ &= \frac{5}{5 + K_c} - \frac{1}{5 + K_c} = \frac{4}{5 + K_c}.\end{aligned}\tag{11}$$

Logo, o erro estacionário é não nulo para  $K_c > 0$ . Porém,

- para  $K_c$  “pequeno” o erro estacionário é “grande”, e
- para  $K_c$  “grande” o erro estacionário é “pequeno”.

## Exemplo 6.1: Controlador P

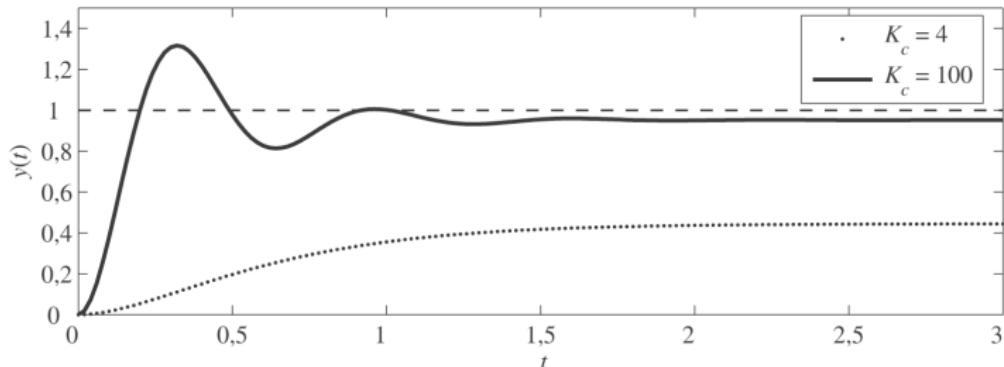


Figura 6.8 Resposta ao degrau unitário em  $r(t)$  com controlador P e  $d(t) = 0$ .

Na Figura 6.8 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula ( $D(s) = 0$ ), para  $K_c = 4$  e  $K_c = 100$ . Note que:

- para  $K_c = 4$ , a resposta transitória é mais lenta, amortecida e o erro estacionário vale

$$e(\infty) = 5 / (5 + K_c) = 1 - y(\infty) \approx 0,556; \quad (12)$$

- para  $K_c = 100$ , a resposta transitória é mais rápida, subamortecida e o erro estacionário vale

$$e(\infty) = 5 / (5 + K_c) = 1 - y(\infty) \approx 0,048. \quad (13)$$

## Exemplo 6.1: Controlador P

- Os diagramas de Bode de  $K_c G(j\omega)$  são apresentados na Figura 6.9 (slide seguinte).
- Para  $K_c = 4$  a margem de ganho é infinita, pois o gráfico de fase nunca cruza a linha de  $180^\circ$  e a margem de fase também é infinita, pois o gráfico do módulo nunca cruza a linha de 0dB.
- Já para  $K_c = 100$  a margem de ganho é infinita mas a margem de fase vale  $MF \approx 34,2^\circ$ .

## Exemplo 6.1: Controlador P

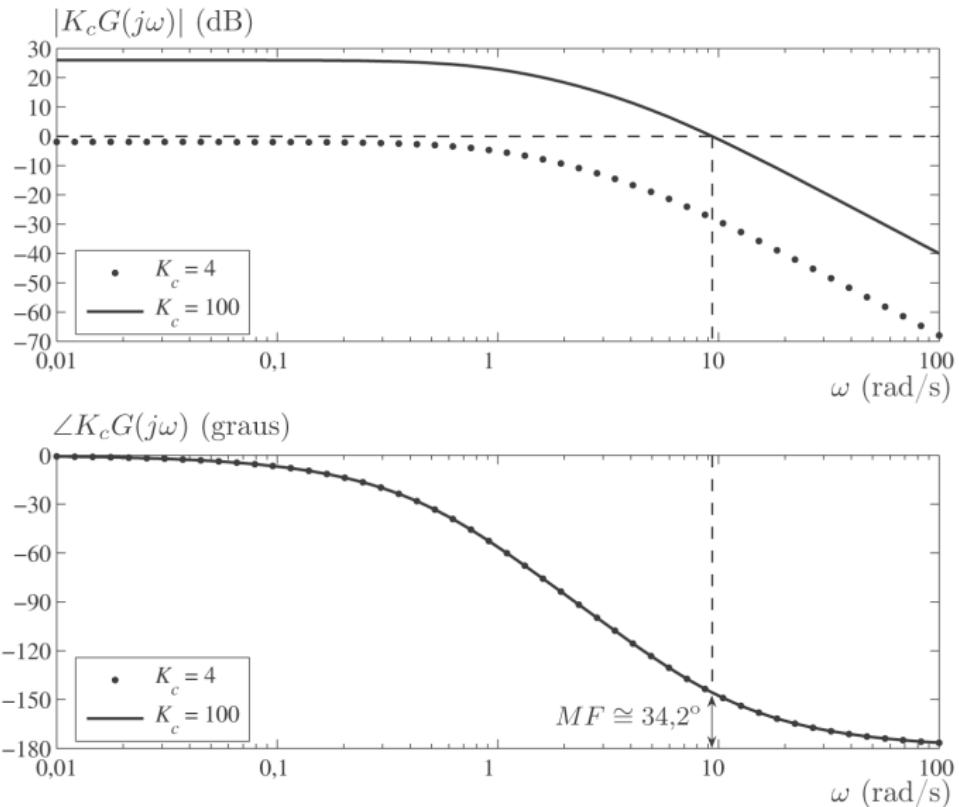


Figura 6.9 Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador P.

## Exemplo 6.1: Controlador PI

A função de transferência do controlador PI é dada por

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K_c (T_I s + 1)}{T_I s}. \quad (14)$$

Um procedimento bastante usual é adotar  $T_I$  de forma que o zero do controlador cancele o polo mais lento da planta, neste exemplo em  $s = -1$ . Assim, supondo  $T_I = 1$  o lugar das raízes fica como mostrado na Figura 6.10.

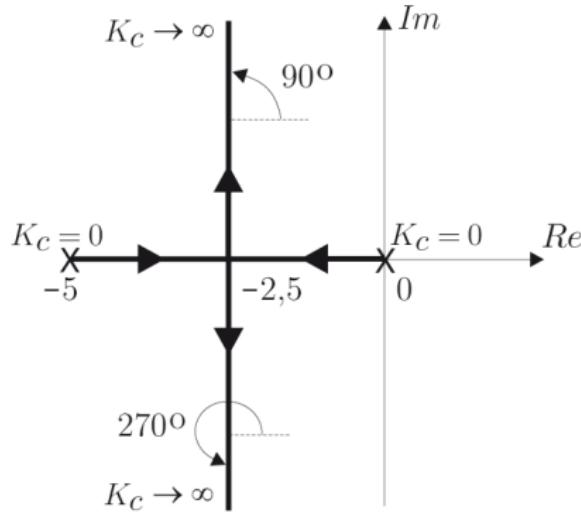


Figura 6.10 Lugar das raízes com o controlador PI.

## Exemplo 6.1: Controlador PI

Verifica-se que o controlador PI desloca o lugar das raízes para a direita do plano  $s$ , piorando a estabilidade relativa do sistema.

Os polos de malha fechada são reais e iguais em  $s = -2,5$  (ponto de cruzamento das assíntotas:  $S_c = \frac{\sum(\text{polos}) - \sum(\text{zeros})}{2} = \frac{-5+0-1-(-1)}{2} = 2,5$ ).

Neste ponto o ganho vale

$$|G(s = -2,5)| = \frac{K_c |s + 1|_{s=-2,5}}{(|s| |s + 1| |s + 5|)_{s=-2,5}} = 1$$
$$\Rightarrow K_c = (|s| |s + 5|)_{s=-2,5} = |-2,5| |2,5| = 6,25. \quad (15)$$

Logo,

- para  $0 < K_c \leq 6,25$  os polos de malha fechada são reais e a resposta ao degrau na referência é amortecida;
- para  $K_c > 6,25$  os polos de malha fechada são complexos conjugados e a resposta ao degrau na referência é subamortecida (pois a parte real é negativa).

## Exemplo 6.1: Controlador PI

Um ponto importante a ser observado é que para quaisquer valores de  $K_c$  e  $T_I$ , tem-se que o erro estacionário para entradas do tipo degrau nos sinais de referência  $R(s)$  e de perturbação  $D(s)$  é igual a zero, independentemente da função de transferência da planta. Esta é a principal característica do termo integrador do controlador PI, válida também para os controladores PID. Esta propriedade pode ser verificada analiticamente a partir do teorema do valor final.

Para  $R(s) = D(s) = \frac{A}{s}$  tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} D(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) G(s)} D(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{T_I s}{T_I s + K_c (T_I s + 1) G(s)} - \frac{T_I s G(s)}{T_I s + K_c (T_I s + 1) G(s)} \right) \frac{A}{s} = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

## Exemplo 6.1: Controlador PI

Na Figura 6.11 é apresentada a resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula, e na Figura 6.12 é apresentada a resposta ao degrau unitário na perturbação, com referência nula. Em ambas as respostas foram adotados  $T_I = 1$ ,  $K_c = 6,25$  e  $K_c = 100$ . Analisando a Figura 6.11 verifica-se que o erro estacionário é sempre nulo. Para  $K_c = 100$  a resposta ao degrau na referência tem um sobressinal  $M_p \approx 44,4\%$ , que é maior que o sobressinal  $M_p \approx 31,6\%$ , obtido com o controlador proporcional, para o mesmo ganho  $K_c = 100$  da Figura 6.8. Isso porque o controlador PI **piora a estabilidade relativa do sistema**. Embora  $T_I$  tenha sido ajustado para cancelar um polo da planta, obviamente outros ajustes para  $K_c$  e  $T_I$  podem ser empregados para atender a uma dada especificação de transitório.

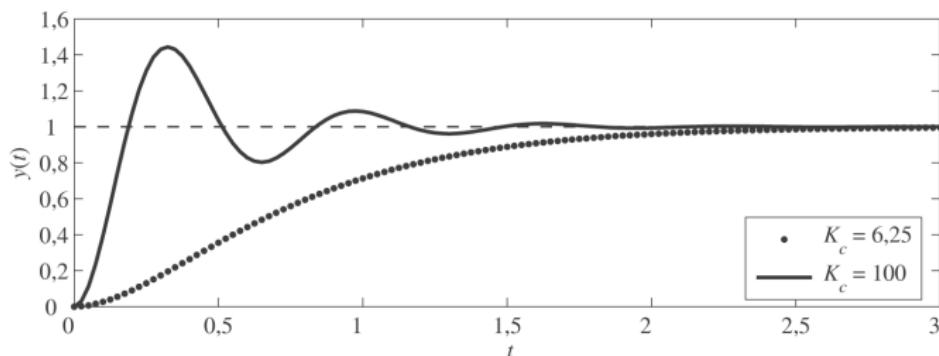


Figura 6.11 Resposta ao degrau unitário em  $r(t)$  com controlador PI e  $d(t) = 0$ .

## Exemplo 6.1: Controlador PI

A Figura 6.12 mostra que a saída estacionária tende para a sua referência ( $y(\infty) = r(\infty) = 0$ ), sendo a perturbação do tipo degrau unitário ( $D(s) = 1/s$ ) completamente rejeitada no estado estacionário.

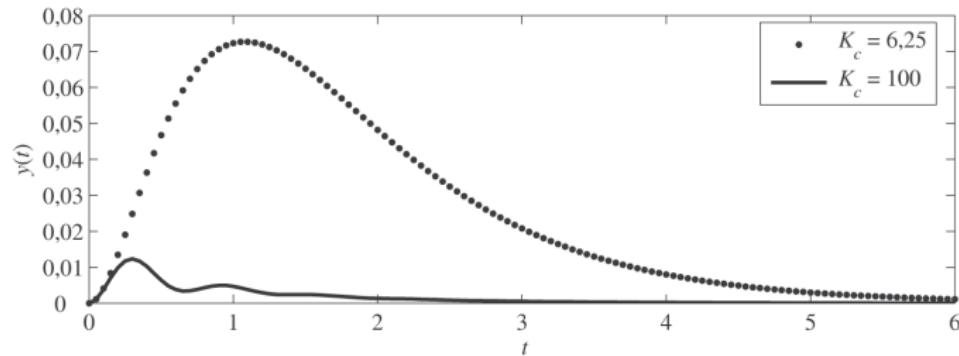


Figura 6.12 Resposta ao degrau unitário em  $d(t)$  com controlador PI e  $r(t) = 0$ .

Os diagramas de Bode de  $G_c(j\omega)G(j\omega)$  são apresentados na Figura 6.13 (slide seguinte). Como o gráfico de fase nunca cruza a linha de  $180^\circ$ , as margens de ganho para  $K_c = 6,25$  e  $K_c = 100$  são infinitas. Porém, para  $K_c = 6,25$  a margem de fase vale  $MF \approx 76^\circ$  e para  $K_c = 100$  a margem de fase vale  $MF \approx 28^\circ$ . Note que para  $K_c = 100$ , a margem de fase é menor, quando comparada com a margem de fase do sistema com o controlador proporcional na Figura 6.9.

## Exemplo 6.1: Controlador PI

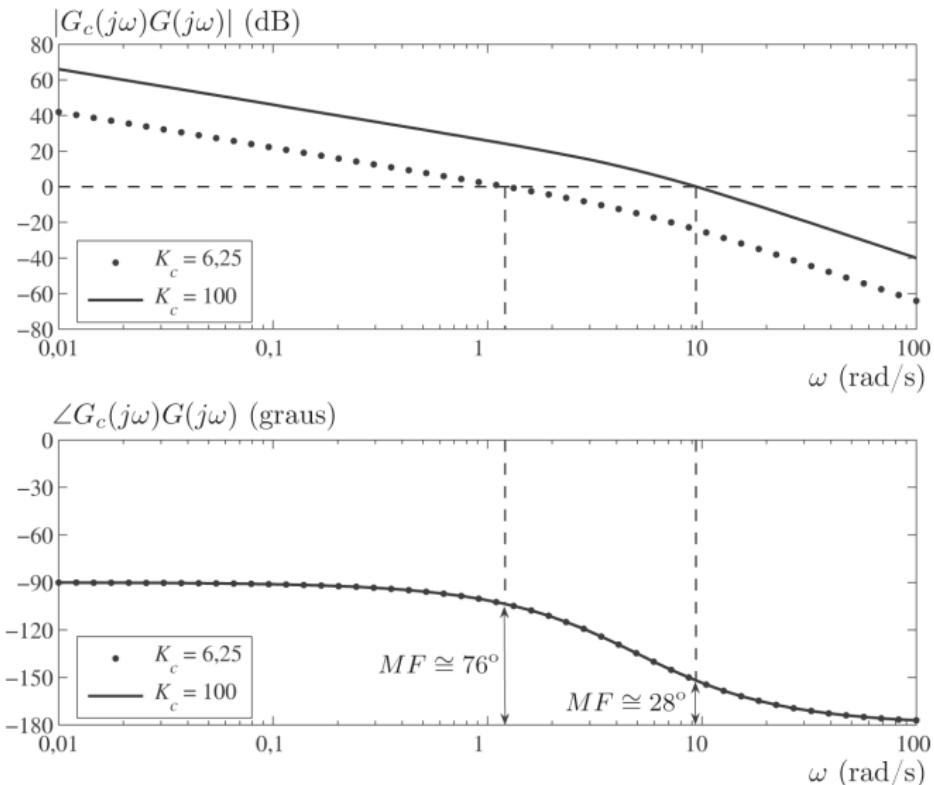


Figura 6.13 Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador PI.

## Exemplo 6.1: Controlador PD

A função de transferência do controlador PD é dada por

$$G_c(s) = K_c (1 + T_D s). \quad (17)$$

Adotando  $T_D = 1$ , de forma que o zero do controlador cancele o polo mais lento da planta, o lugar das raízes fica como mostrado na Figura 6.14.

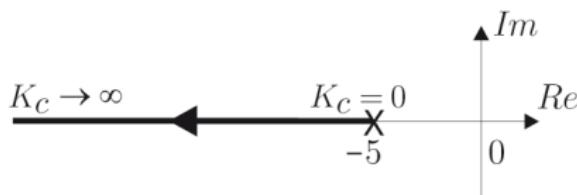


Figura 6.14 Lugar das raízes com o controlador PD.

Conforme se pode verificar, o lugar das raízes se desloca para a esquerda, aumentando a estabilidade relativa do sistema. Em particular para o valor de  $T_D$  adotado pode-se ajustar um ganho elevado para  $K_c$ , que a resposta transitória é sempre superamortecida.

## Exemplo 6.1: Controlador PD

Aplicando-se entradas do tipo degrau unitário na referência  $R(s)$  e na perturbação  $D(s)$ , o erro estacionário vale

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} D(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{(s+5)}{(s+5) + K_c} - \frac{1}{(s+5) + K_c} \right) \frac{1}{s} = \frac{5-1}{5+K_c} = \frac{4}{5+K_c}. \quad (18)\end{aligned}$$

Logo, o erro estacionário é não nulo para  $K_c > 0$ . Porém,

- para  $K_c$  “pequeno” o erro estacionário é “grande”;
- para  $K_c$  “grande” o erro estacionário é “pequeno”.

## Exemplo 6.1: Controlador PD

Na Figura 6.15 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula, para  $K_c = 100$ . Verifica-se que com o controlador PD foi possível obter uma resposta rápida e sem sobressinal, o que não ocorreu com os controladores P e PI. Para  $D(s) = 0$  o erro estacionário vale

$$e(\infty) = 5/(5 + K_c) = 1 - y(\infty) \approx 0,048. \quad (19)$$

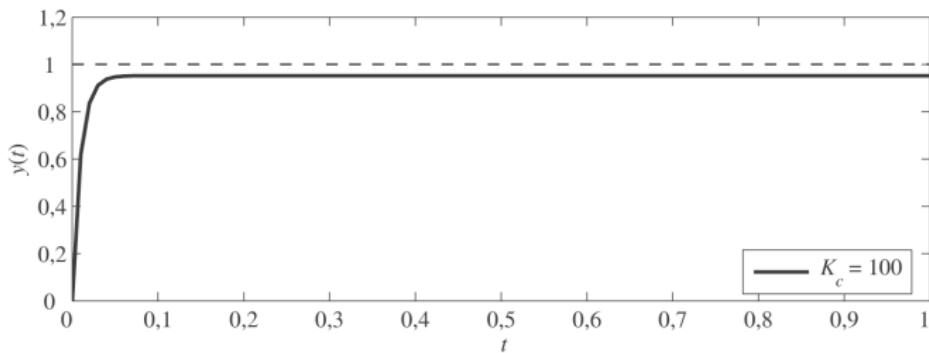
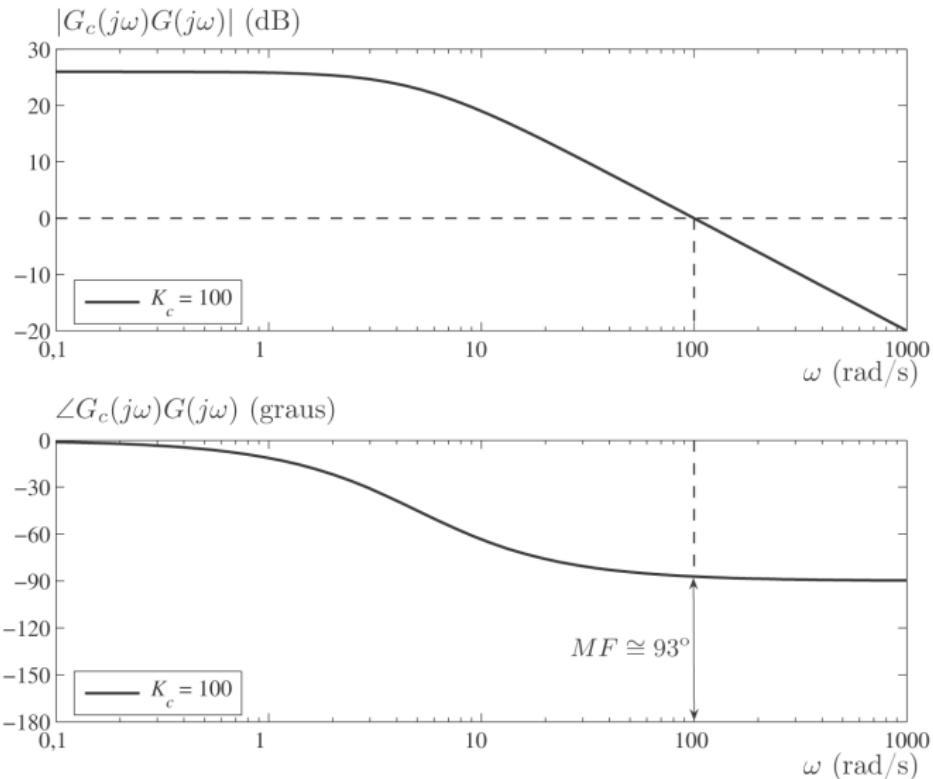


Figura 6.15 Resposta ao degrau unitário em  $r(t)$  com controlador PD e  $d(t) = 0$ .

Os diagramas de Bode de  $G_c(j\omega)G(j\omega)$  são apresentados na Figura 6.16 (slide seguinte). A margem de ganho é infinita e a margem de fase vale  $MF \approx 93^\circ$ . Note que para o mesmo ganho  $K_c = 100$ , a margem de fase obtida com o controlador PD é maior que as margens de fase obtidas com os controladores P e PI.

## Exemplo 6.1: Controlador PD



**Figura 6.16** Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador PD.

## Exemplo 6.1: Controlador PID

A função de transferência do controlador PID é dada por

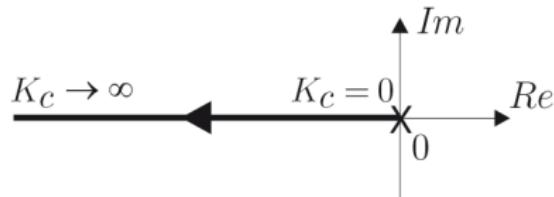
$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \frac{K_c T_I T_D s^2 + K_c T_I s + K_c}{T_I s}. \quad (20)$$

Adotando  $T_I = 6/5$  e  $T_D = 1/6$ , de modo que os zeros do controlador cancelam os polos da planta, a função de transferência de malha aberta resulta em

$$\begin{aligned} G_{ma}(s) &= G_c(s) G(s) = K_c \left( 1 + \frac{5}{6s} + \frac{1}{6}s \right) \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ &= K_c \left( \frac{s^2 + 6s + 5}{6s} \right) \frac{1}{s^2 + 6s + 5} = \frac{K_c}{6s}. \end{aligned} \quad (21)$$

## Exemplo 6.1: Controlador PID

O lugar das raízes é apresentado na Figura 6.17.



**Figura 6.17** Lugar das raízes com o controlador PID.

Neste exemplo, o controlador PID possui todas as vantagens dos controladores P, PI e PD:

- aumentando-se o ganho  $K_c$  pode-se obter uma resposta rápida e sempre amortecida;
- o erro estacionário é nulo para entradas do tipo degrau na referência e na perturbação.

## Exemplo 6.1: Controlador PID

Na Figura 6.18 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau unitário na referência, com perturbação nula, para  $K_c = 100$ .

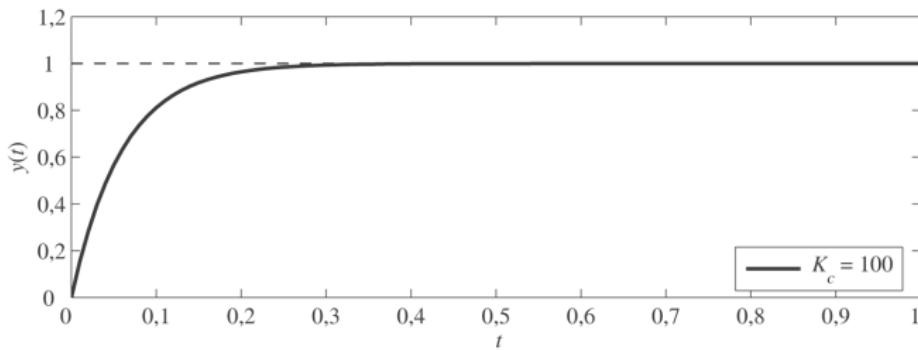
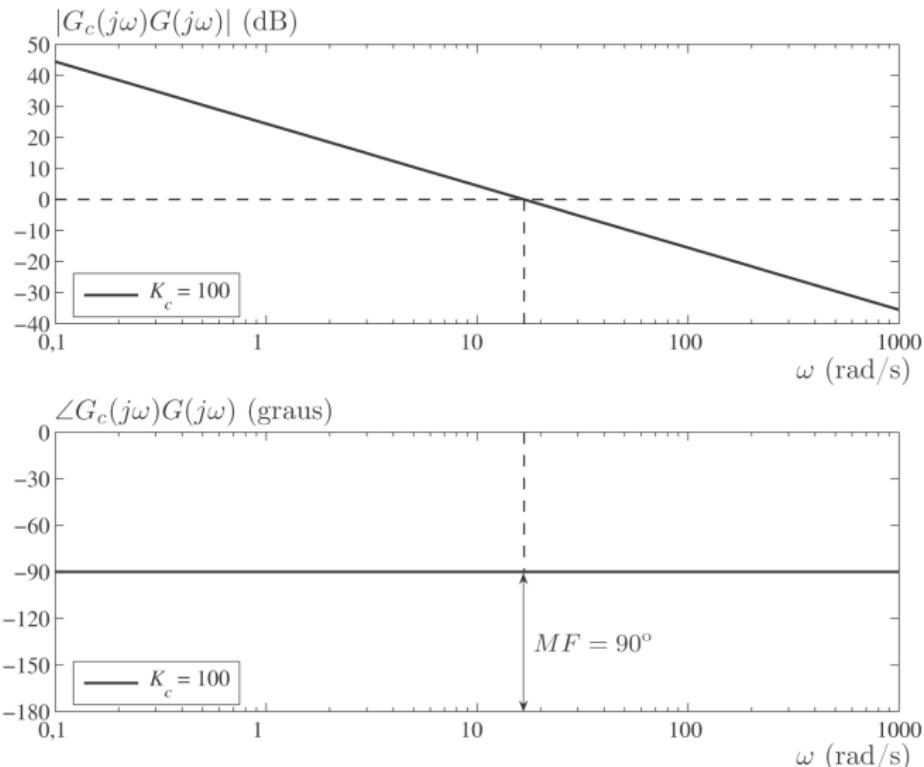


Figura 6.18 Resposta ao degrau unitário em  $r(t)$  com controlador PID e  $d(t) = 0$ .

Os diagramas de Bode de  $G_c(j\omega)G(j\omega)$  são apresentados na Figura 6.19 (slide seguinte). A margem de ganho é infinita e a margem de fase vale  $MF \approx 90^\circ$ , que é maior que as margens de fase obtidas com os controladores P e PI.

## Exemplo 6.1: Controlador PID



**Figura 6.19** Diagramas de Bode da função de malha aberta com controlador PID.

# Bibliografia

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2<sup>a</sup> edição, LTC, 2018.  
ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 6.**