

# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

## Parte 2.2: Compensação por meio do lugar das raízes

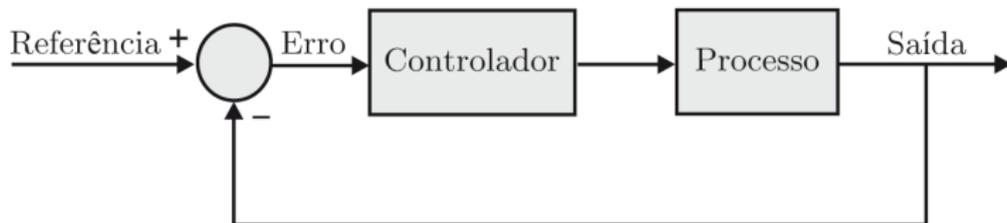
**Professora:** Cecília de Freitas Morais  
**Auxiliar didático (PED):** Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br  
a242988@dac.unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

# Compensação por meio do lugar das raízes

Projetar um controlador ou um compensador significa modificar a resposta de um sistema de modo que sua saída atenda a determinadas especificações. Os controladores são formados por funções de transferência que adicionam polos e zeros ao sistema. Um esquema de controle típico de um processo em malha fechada com realimentação da saída é apresentado na Figura 4.15.



**Figura 4.15** Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.

De um modo geral, três especificações são muito importantes no projeto de sistemas de controle:

- estabilidade;
- erro estacionário “pequeno” ou nulo;
- bom desempenho, que consiste em sobressinal “baixo” e tempo de resposta transitória “pequeno”.

# Compensação por meio do lugar das raízes

Conforme analisado anteriormente para sistemas subamortecidos ( $0 < \xi < 1$ ), os parâmetros da resposta temporal da figura abaixo valem:

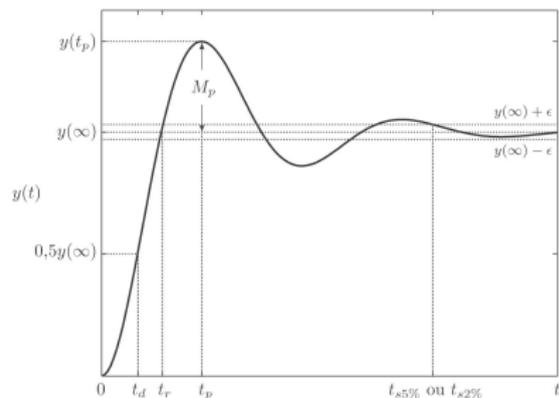


Figura 3.20 Parâmetros para medidas de desempenho de sistemas subamortecidos.

sendo  $\xi$  o coeficiente de amortecimento,  $\omega_n$  a frequência natural não amortecida e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  a frequência natural amortecida.

$$\text{Sobressinal máximo: } M_p(\%) = e^{-\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} 100\%;$$

$$\text{Tempo de pico: } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d};$$

$$\text{Tempo de subida: } t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_d};$$

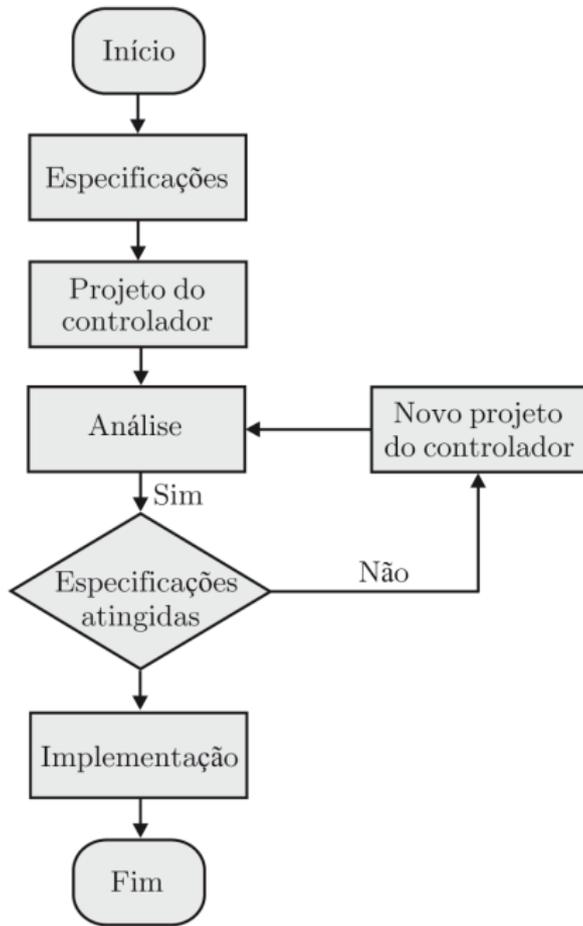
$$\text{Tempo de acomodação (critério 5\%): } t_s \cong \frac{3}{\xi \omega_n};$$

$$\text{Tempo de acomodação (critério 2\%): } t_s \cong \frac{4}{\xi \omega_n};$$

$$\text{Período das oscilações: } T_d = \frac{2\pi}{\omega_d};$$

# Compensação por meio do lugar das raízes

- A especificação de estabilidade é essencial para qualquer sistema em malha fechada, pois não há sistema instável que tenha utilidade prática.
- A característica de erro estacionário “pequeno” ou nulo é desejável para uma grande quantidade de sistemas em que se espera que as saídas sigam determinadas referências ou estejam pelo menos próximas dos valores desejados.
- Já a especificação de desempenho está relacionada ao sobressinal e ao tempo de resposta transitória.
- Normalmente deseja-se que a resposta transitória tenha um sobressinal “baixo” e um tempo de resposta “pequeno” (tempo de subida, de pico, de acomodação, etc.).
- Muitas vezes as etapas de projeto de sistemas de controle resultam de um procedimento de tentativa e erro até que as especificações desejadas sejam atingidas.
- Uma vez adotadas as especificações de projeto, o próximo passo consiste em projetar o controlador/compensador, calculando os seus parâmetros;
- Após essa etapa deve-se realizar uma análise do sistema em malha-fechada para verificar se as especificações de projeto inicialmente adotadas foram atingidas;
- Se os resultados forem satisfatórios pode-se passar para a etapa de implementação do controlador;
- Caso contrário novos projetos de controladores devem ser realizados.
- Um esquema desse procedimento de projeto está sistematizado na Figura 4.16.



**Figura 4.16** Esquema dos procedimentos de projeto de sistemas de controle.

# Compensação por meio do lugar das raízes

- Para sistemas com ordem elevada ( $\geq 3$ ) normalmente a resposta do sistema em malha fechada é dominada pelos polos de malha fechada que se localizam mais próximos do eixo imaginário (**polos dominantes**).
- Caso a resposta não dependa apenas desses polos, a resposta do sistema compensado pode não produzir os resultados desejados;
- Por essa razão, após a realização do projeto é importante analisar a resposta do sistema em malha fechada, por meio de uma simulação em computador, verificando se os resultados estão de acordo com as especificações desejadas.
- Quando as especificações de projeto são fornecidas em termos da resposta transitória temporal o projeto do controlador a partir do sistema em malha aberta pode ser realizado por meio da **técnica do lugar das raízes**.

## Compensação por avanço de fase

# Compensação por avanço de fase

- A compensação por avanço de fase (*phase lead*) tem a propriedade de melhorar a resposta temporal do sistema, reduzindo o sobressinal e o tempo da resposta transitória;
- O bloco típico de um compensador por avanço de fase tem a função de transferência

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right), \quad z_c < p_c. \quad (1)$$

- Para verificar esta propriedade basta notar que quando o compensador por avanço de fase é incluído na malha o ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real, calculado por

$$s_c = \frac{\sum(\text{polos de } G_{ma}(s)) - \sum(\text{zeros de } G_{ma}(s))}{n - m}. \quad (2)$$

é deslocado para a esquerda do plano  $s$  e com isso, o lugar das raízes também se desloca para a esquerda, fazendo com que o sobressinal e o tempo de resposta sejam reduzidos<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Considerando um sistema com 2 polos dominantes:

$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$ , quanto maior  $\xi$ , menor é o sobressinal  $M_p$  e o valor de  $t_s$ .

- O diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase é apresentado na Figura 4.17.

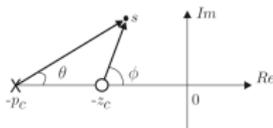


Figura 4.17 Diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase.

- O zero do compensador  $z_c$  deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao polo  $p_c$ .
- A designação *avanço de fase* reside no fato de que para qualquer ponto  $s$  com  $Re < 0$  e  $Im > 0$  o compensador  $G_c(s)$  adiciona fase na malha aberta, pois  $\angle G_c(s) = \phi - \theta > 0$ .

## Compensação por avanço de fase

- Basicamente, a metodologia de projeto consiste em determinar as posições dos polos de malha fechada dominantes que satisfazem às especificações de desempenho desejadas, como sobressinal e tempo de resposta transitória (tempo de subida, pico, acomodação, etc.);
- O zero e o polo do compensador  $G_c(s)$  devem ser alocados de tal forma que o lugar das raízes **passe pelos polos de malha fechada dominantes**.
- Uma vez fixada a posição do zero do compensador ( $z_c$ ) a posição do polo ( $p_c$ ) pode ser determinada por meio da condição de fase:

$$\begin{aligned}\angle G(s)H(s) &= \angle s - z_1 + \angle s - z_2 + \dots + \angle s - z_m \\ &\quad - \angle s - p_1 - \angle s - p_2 - \dots - \angle s - p_n = \\ &= 180^\circ \pm r360^\circ \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)\end{aligned}$$

- Depois disso o ganho  $k_c$  pode ser obtido por meio da condição de módulo.

$$k = \frac{|s - p_1| |s - p_2| \dots |s - p_n|}{|s - z_1| |s - z_2| \dots |s - z_m|}. \quad (4)$$

## Exemplo 4.7 (Objetivo do Projeto)

Um servomecanismo<sup>a</sup>, composto por um motor de corrente contínua, possui a função de transferência

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{5}{s(s+1)}, \quad (5)$$

e  $\Theta(s)$  e  $E_a(s)$  representam as transformadas de Laplace da posição angular do eixo e da tensão de armadura, respectivamente. O diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador é apresentado na Figura 4.18.

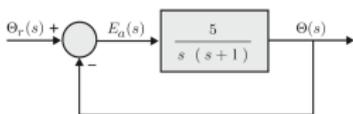


Figura 4.18 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador.

<sup>a</sup>Servomecanismos são sistemas de controle realimentado geralmente responsáveis por usar um sinal de erro para corrigir o seguimento a uma referência, geralmente posição.

A função de transferência de malha fechada do sistema de segunda ordem com realimentação unitária (sem controlador/compensador) é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (6)$$

sendo  $\Theta_r(s)$  a posição angular desejada, a frequência natural não amortecida é  $\omega_n = \sqrt{5}(\text{rad/s})$  e o coeficiente de amortecimento é  $\xi = 1/(2\sqrt{5}) \approx 0,224$ . Quando é aplicado um degrau unitário na entrada  $\theta_r(t)$ , a saída  $\theta(t)$  apresenta a resposta da Figura 4.19.

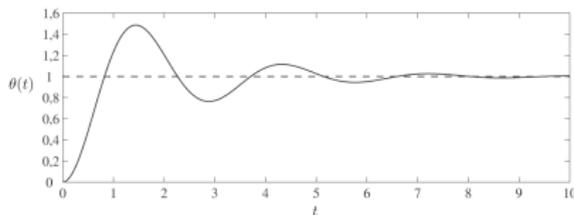


Figura 4.19 Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada sem compensador.

## Exemplo 4.7 (Objetivo do Projeto)

De acordo com a Figura 4.19, o sobressinal vale

$$M_p(\%) = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} 100\% \approx 48,6\%, \quad (7)$$

e o tempo de acomodação, segundo o critério de 2%, é

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \approx 8 \text{ s}. \quad (8)$$

**Objetivo:** Deseja-se projetar um compensador  $G_c(s)$ , conforme representado no diagrama de blocos da Figura 4.20, de modo que o coeficiente de amortecimento dos polos de malha fechada dominantes seja  $\xi = 0,5$  ( $M_p \approx 16\%$ ) e o tempo de acomodação seja reduzido para  $t_s(2\%) \approx 2 \text{ s}$ , isto é

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow \omega_n = 4 \text{ rad/s} \quad (9)$$

Portanto, para que as especificações sejam satisfeitas, os polos de malha fechada dominantes devem estar localizados em

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}. \quad (10)$$

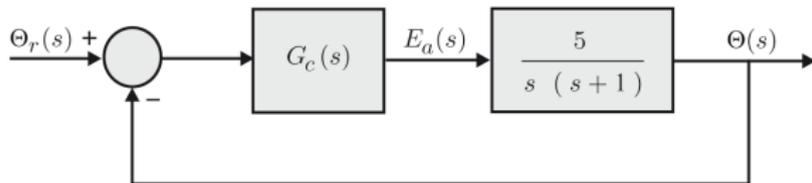


Figura 4.20 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com compensador.

## Exemplo 4.7 (Análise e Solução)

Se  $G_c(s)$  for apenas um ganho, isto é,  $G_c(s) = k$ , é impossível satisfazer às especificações fornecidas. Conforme se pode perceber pelo lugar das raízes da Figura 4.21, variando-se apenas o ganho  $k$  os polos de malha fechada nunca passam pelos polos calculados em (10).

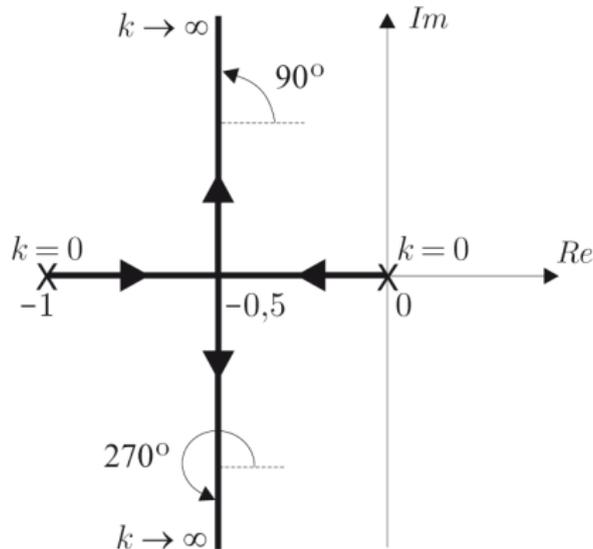


Figura 4.21 Lugar das raízes sem compensador.

## Exemplo 4.7 (Análise e Solução)

Para deslocar o lugar das raízes para a esquerda pode-se empregar um compensador por avanço de fase

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right). \quad (11)$$

Adotando o zero do compensador na mesma posição que a parte real dos polos de malha fechada dominantes ( $z_c = 2$ ) o polo do compensador pode ser calculado pela condição de fase, ou seja,

$$\underline{\angle s + p_c} = \underline{\angle s + 2} - \underline{\angle s} - \underline{\angle s + 1} + 180^\circ. \quad (12)$$

No polo desejado para malha fechada  $s = -2 + j2\sqrt{3}$  tem-se que

$$\arctan \left( \frac{2\sqrt{3}}{p_c - 2} \right) = 90^\circ - 120^\circ - 106,1^\circ + 180^\circ = 43,9^\circ. \quad (13)$$

Calculando a tangente do dois membros da Equação (13), obtém-se  $p_c \approx 5,6$ . O valor do ganho  $k_c > 0$  pode ser obtido por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{k_c(s + 2)}{(s + 5,6)s(s + 1)} \right| = 1 \quad (14)$$
$$\Rightarrow k_c = \frac{|s + 5,6||s||s + 1|}{5|s + 2|}.$$

No polo de malha fechada  $s = -2 + 2\sqrt{3}j$  obtém-se  $k_c \approx 4,16$ . Portanto,

$$G_c(s) = 4,16 \left( \frac{s + 2}{s + 5,6} \right). \quad (15)$$

O lugar das raízes do sistema com o compensador (15) é apresentado na Figura 4.22.

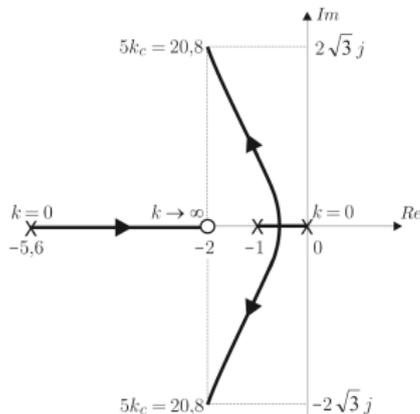
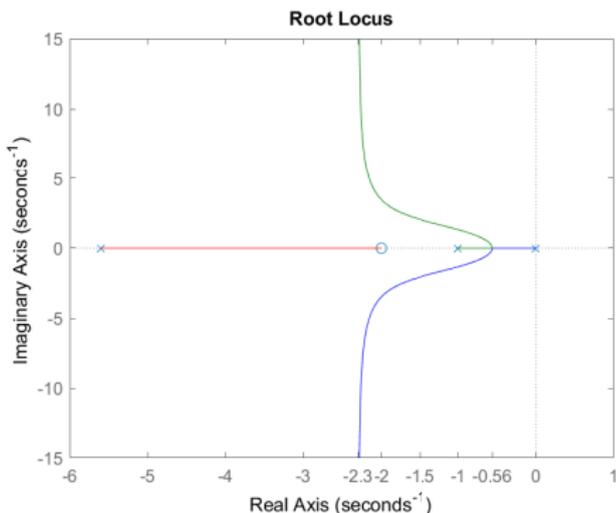


Figura 4.22 Lugar das raízes com compensador.

## Exemplo 4.7 (Análise e Solução)

O lugar das raízes do sistema com o compensador (15) obtido pelo Matlab:

```
s=tf('s');  
Gc=4.16*(s+2)/(s+5.6);  
G=5/(s*(s+1));  
rlocus(Gc*G)
```



O sistema em malha fechada com o compensador (15) resulta num sistema de ordem 3, cuja função de transferência é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{20,8(s+2)}{s^3 + 6,6s^2 + 26,4s + 41,6} = \frac{20,8(s+2)}{(s+2,6)(s+2-2\sqrt{3}j)(s+2+2\sqrt{3}j)} \quad (16)$$

## Exemplo 4.7 (Análise e Solução)

Outra solução para o projeto do compensador pode ser obtida por meio de uma análise direta do lugar das raízes. Se o zero  $z_c$  do compensador for cancelado com o polo estável<sup>a</sup> da planta ( $s = -z_c = -1$ ), sabendo que  $S_c = ((0 - 1 - p_c) - (-z_c))/(3 - 1)$  e se o polo do compensador for alocado na posição  $s = -p_c = -4$ , então o lugar das raízes passa exatamente pelos polos de malha fechada desejados ( $s = -2 \pm 2\sqrt{3}j$ ), conforme ilustrado na figura ao lado.

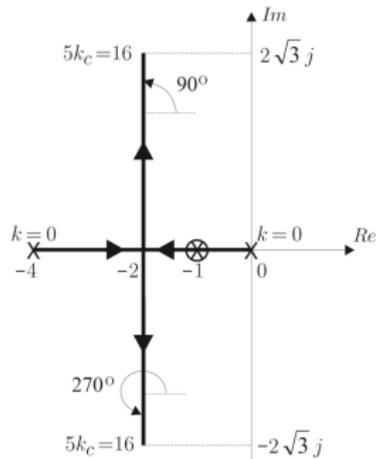
Com isso, o sistema em malha aberta  $G_{ma}(s)$  resultante é de ordem 2, isto é,

$$G_{ma}(s) = \frac{k_c(s+1)}{(s+4)} \frac{5}{s(s+1)} = \frac{5k_c}{s(s+4)}. \quad (17)$$

O valor do ganho  $k_c > 0$  em qualquer polo de malha fechada desejado pode ser calculado por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{5k_c}{s(s+4)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \Rightarrow k_c = 3,2. \quad (18)$$

<sup>a</sup>O cancelamento nunca deve ser realizado com polos instáveis, pois na prática este cancelamento pode não ser perfeito, fazendo com que o sistema tenha polos de malha fechada no semiplano direito, tornando-o instável.



Portanto, a função de transferência do compensador é dada por

$$G_c(s) = 3,2 \left( \frac{s+1}{s+4} \right). \quad (19)$$

A função de transferência de malha fechada com o compensador (19) é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16} = \frac{16}{(s + 2 - 2\sqrt{3}j)(s + 2 + 2\sqrt{3}j)}. \quad (20)$$

## Exemplo 4.7 (Análise e Solução)

- As respostas ao degrau unitário do sistema não compensado (6), do sistema compensado de segunda ordem (20) e do sistema compensado de terceira ordem (16) são apresentadas na Figura 4.24.
- Como o sistema (16) é de terceira ordem e o polo localizado em  $s = -2,6$  está próximo dos polos complexos conjugados, a resposta transitória possui um sobressinal um pouco maior que o desejado ( $M_p \approx 16\%$ ). Já o sistema (20), por ser de segunda ordem, produz uma resposta de acordo com as especificações.
- No projeto de compensadores nem sempre é possível realizar cancelamentos de modo a reduzir a ordem do sistema. Em sistemas de ordem elevada, se os polos dominantes estiverem próximos dos demais polos e zeros a resposta transitória pode não ocorrer exatamente de acordo com as especificações desejadas. Por essa razão, é necessário analisar os resultados obtidos empregando-se também recursos computacionais.
- O projeto do compensador deve ser refeito até que os resultados obtidos possam ser considerados satisfatórios.

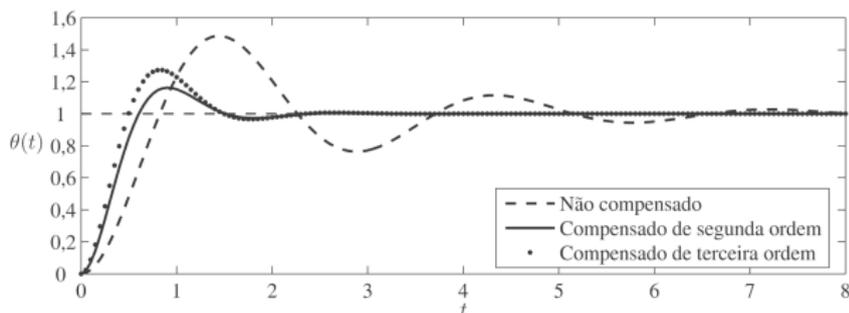


Figura 4.24 Respostas ao degrau unitário do sistema não compensado (4.47), do sistema compensado de segunda ordem (4.63) e do sistema compensado de terceira ordem (4.59).

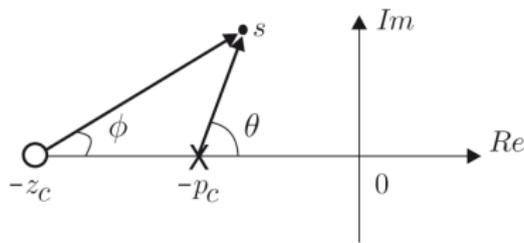
## Compensação por atraso de fase

# Compensação por atraso de fase

- O bloco típico de um compensador por atraso de fase (*lag phase*) tem a função de transferência

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right), \quad z_c > p_c. \quad (21)$$

- O diagrama de polos e zeros de um compensador por atraso de fase é apresentado na Figura 4.25.
- O polo do compensador  $p_c$  deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao zero  $z_c$ .
- A designação atraso de fase reside no fato de que para qualquer ponto  $s$  com  $Re < 0$  e  $Im > 0$  o compensador  $G_c(s)$  diminui a fase da malha aberta, pois  $\angle G_c(s) = \phi - \theta < 0$ .



**Figura 4.25** Diagrama de polos e zeros de um compensador por atraso de fase.

# Compensação por atraso de fase

- A compensação por atraso de fase é indicada quando a resposta transitória é satisfatória, mas o **erro no estado estacionário precisa ser melhorado**.
- Ao contrário do compensador por avanço, o compensador por atraso tende a piorar a resposta transitória pois tende a deslocar o lugar das raízes no sentido da direita do semiplano  $s$ .
- Para que o lugar das raízes não seja modificado com a inclusão do compensador na malha a contribuição de fase do compensador deve ser próxima de zero.
- De acordo com a Figura 4.26, isso somente é possível se o polo  $p_c$  e o zero  $z_c$  do compensador estiverem próximos um do outro.

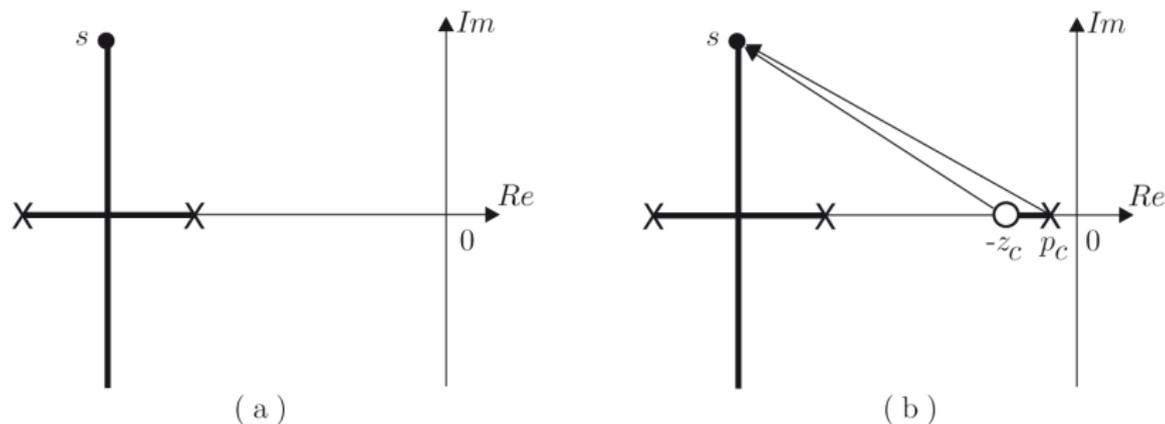


Figura 4.26 Lugar das raízes. (a) Sem compensador. (b) Com compensador.

# Compensação por atraso de fase

- Analisando a Figura 4.26 verifica-se que quando o polo  $p_c$  e o zero  $z_c$  do compensador estão próximos a contribuição de fase é praticamente nula.
- Além disso, as distâncias do polo  $p_c$  e do zero  $z_c$  até o ponto  $s$ , onde estaria um polo de malha fechada desejado, são praticamente as mesmas.
- Com isso, o ganho  $k_c$  do compensador vale aproximadamente 1, pois os vetores que representam estas distâncias são aproximadamente iguais.
- Considere um sistema com realimentação unitária, sem o compensador por atraso de fase, cuja função de transferência de malha aberta seja dada por

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)}, \quad (22)$$

sendo  $k$  um ganho,  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $T_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) constantes de tempo não nulas.

Sabe-se que a transformada do erro ( $e(t)$ ) em um sistema com realimentação unitária é

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s),$$

em que  $R(s)$  é a entrada de referência e  $G(s)$  é a função de transferência do sistema. Aplicando-se uma rampa unitária na referência ( $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ), supondo que  $G(s)$  é dada por (22), o erro estacionário do sistema em malha-fechada sem compensador pode ser calculado por meio do teorema do valor final, ou seja,

$$\begin{aligned} e_s(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \cancel{s} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \frac{1}{\cancel{s^2}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (23)$$

# Compensação por atraso de fase

Considere agora um sistema com compensador por atraso de fase, com  $k_c \approx 1$ . A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G(s) \\ = \frac{(s + z_c) k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(s + p_c) s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \quad (24)$$

Aplicando-se uma rampa unitária na referência, o erro estacionário com compensador  $e_c(\infty)$  vale

$$e_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \cancel{s} \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{\cancel{s}} \right] \quad (25) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG_{ma}(s)} = \frac{p_c}{z_c k}.$$

Das Equações (23) e (25) tem-se que a relação entre os erros estacionários com e sem compensador é dada por

$$\frac{e_c(\infty)}{e_s(\infty)} = \frac{\frac{p_c}{z_c k}}{\frac{1}{k}} = \frac{p_c}{z_c k} \cdot \frac{k}{1} \Rightarrow e_c(\infty) = \frac{p_c}{z_c} e_s(\infty). \quad (26)$$

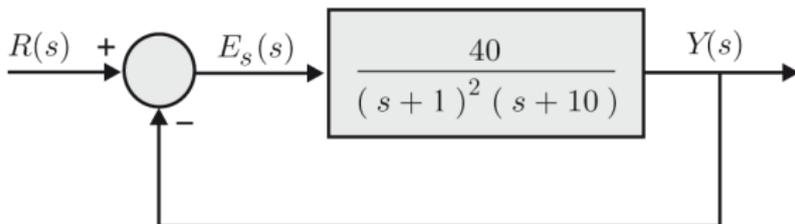
- Para que o erro estacionário com compensador  $e_c(\infty)$  seja, por exemplo, 10 vezes menor que o erro sem compensador  $e_s(\infty)$  o zero do compensador deve ser 10 vezes maior que o seu polo, isto é,  $z_c = 10p_c$ .
- Portanto, a única maneira de a relação entre o zero e o polo ser “grande” de modo a reduzir o erro estacionário e, simultaneamente, ter o polo e o zero do compensador próximos um do outro, para que a resposta transitória não seja afetada, é que  $p_c$  e  $z_c$  devem estar localizados próximos da origem.
- Assim, escolhendo por exemplo o polo em  $p_c = -0,01$  o zero deve estar em  $z_c = -0,1$ .

## Exemplo 4.8 (Objetivo do Projeto)

Considere um sistema com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)^2(s+10)}. \quad (27)$$

O diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador é apresentado na Figura 4.27.



**Figura 4.27** Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador.

## Exemplo 4.8 (Objetivo do Projeto)

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{40}{s^3 + 12s^2 + 21s + 50} = \frac{40}{(s + 10,448)(s^2 + 1,552s + 4,786)} \\ &= \frac{8,3577}{s + 10,448} \cdot \frac{4,786}{s^2 + 1,552s + 4,786} \\ &= \frac{40}{(s + 10,448)(s + 0,776 + 2,045j)(s + 0,776 - 2,045j)}\end{aligned}\quad (28)$$

Logo, os polos de malha fechada dominantes do sistema sem compensador estão localizados em  $s_{1,2} = -0,776 \pm 2,045j$ , em que<sup>1</sup> a frequência natural é  $\omega_n = \sqrt{4,786} = 2,188$  e o coeficiente de amortecimento é  $\xi = 1,552/(2\omega_n) \approx 0,355$ .

Aplicando-se um **degrau unitário** na referência ( $R(s) = \frac{1}{s}$ ), o erro estacionário  $e_s(\infty)$  sem compensador é

$$e_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \cancel{s} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \frac{1}{\cancel{s}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1+4} = 0,2. \quad (29)$$

Deseja-se projetar um compensador  $G_c(s)$  por atraso de fase de modo a reduzir o erro estacionário em 10 vezes ( $e_c(\infty) = 0,02$ ), sem que a resposta transitória tenha mudança significativa.

---

<sup>1</sup>  $M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 30,37\%$  e  $t_s(2\%) = 4/(\xi\omega_n) = 5,15$  s.

## Exemplo 4.8 (Análise e Solução)

A função de transferência de malha aberta com o compensador  $G_c(s)$  é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G(s) = \frac{k_c(s + z_c)}{(s + p_c)} \frac{40}{(s + 1)^2(s + 10)}. \quad (30)$$

Logo, o erro estacionário  $e_c(\infty)$  com compensador vale

$$e_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \cancel{s} \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{\cancel{s}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k_c(s + z_c)40}{(s + p_c)(s + 1)^2(s + 10)}} = \frac{1}{1 + \frac{k_c z_c 4}{p_c}} = 0,02. \quad (31)$$

Para que a resposta transitória não tenha mudança significativa com o compensador  $G_c(s)$ , a posição dos polos de malha fechada dominantes deve ser praticamente a mesma no lugar das raízes. Para isso, o ganho  $k_c$  deve valer aproximadamente 1. Logo,

$$\frac{1}{1 + \frac{z_c 4}{p_c}} \approx 0,02 \Rightarrow \frac{1}{0,02} \approx 1 + \frac{z_c 4}{p_c} \Rightarrow 50 - 1 \approx \frac{4z_c}{p_c} \Rightarrow \frac{z_c}{p_c} \approx \frac{49}{4} = 12,25. \quad (32)$$

Escolhendo arbitrariamente um valor próximo da origem para o polo  $p_c = 0,01$ , obtém-se  $z_c = 12,25 \cdot 0,01 = 0,1225$ .

## Exemplo 4.8 (Análise e Solução)

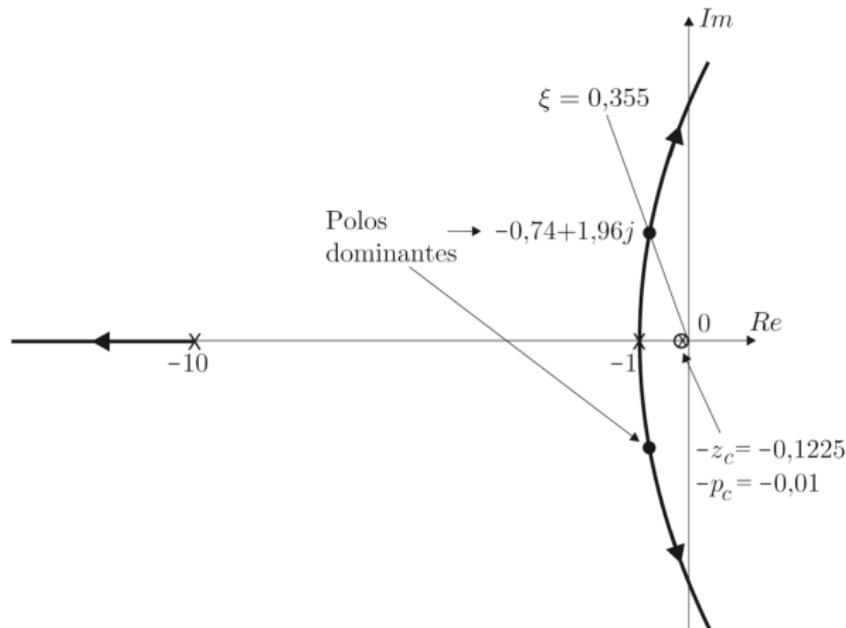


Figura 4.28 Lugar das raízes do sistema compensado.

Na Figura 4.28 é apresentado o lugar das raízes do sistema compensado. Traçando uma reta pelo coeficiente de amortecimento  $\xi \approx 0,355$  ( $\beta = \cos^{-1}(0,355) \approx 69.21^\circ$ ), obtêm-se os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado, que estão em  $s_{1,2} = -0,74 \pm 1,96j$ .

## Exemplo 4.8 (Análise e Solução)

O ganho  $k_c$  pode ser ajustado pela condição de módulo

$$\left| \frac{40k_c(s + 0,1225)}{(s + 0,01)(s + 1)^2(s + 10)} \right|_{s=-0,74+1,96j} = 1$$
$$\Rightarrow k_c = \frac{|s + 0,01||s + 1|^2|s + 10|}{40|s + 0,1225|} \Big|_{s=-0,74+1,96j} \approx 0,9415. \quad (33)$$

Portanto, a função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{0,9415(s + 0,1225)}{s + 0,01}. \quad (34)$$

A função de transferência de malha fechada do sistema compensado é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{37,66(s + 0,1225)}{s^4 + 12,01s^3 + 21,12s^2 + 47,87s + 4,71}$$
$$= \frac{37,66(s + 0,1225)}{(s + 0,103)(s + 10,42)(s + 0,74 + 1,96j)(s + 0,74 - 1,96j)}. \quad (35)$$

## Exemplo 4.8 (Análise e Solução)

Na Figura 4.29 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada compensado e não compensado. A inclusão do compensador aumenta a ordem do sistema de 3 para 4, acrescentando um polo em  $s = -0,103$  e um zero em  $s = -0,1225$  próximos dos polos dominantes. Com isso, a resposta transitória do sistema compensado é um pouco diferente do sistema não compensado. Porém, o erro estacionário foi reduzido de acordo com o esperado.

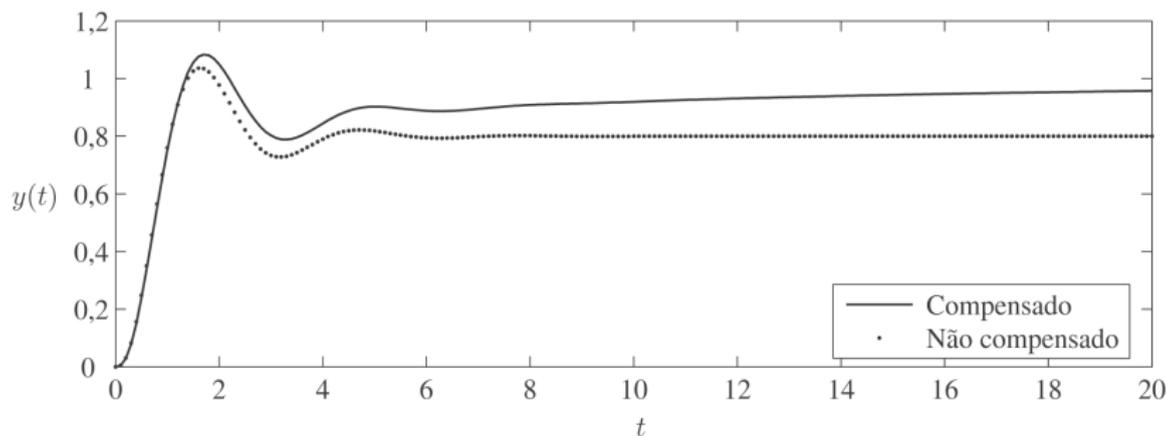


Figura 4.29 Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado.

# Compensação por avanço e atraso de fase (*lead-lag*)

## Compensação por avanço e atraso de fase

- A compensação por avanço e atraso de fase (*lead-lag phase*) é muito utilizada na prática, e aplica os dois recursos analisados anteriormente.
- Esta compensação é indicada quando é necessário melhorar simultaneamente a resposta transitória e o erro no estado estacionário.
- Primeiramente, projeta-se um compensador por avanço de fase para melhorar a resposta transitória.
- Depois calcula-se quanto o erro estacionário ainda deve ser melhorado.
- Por fim, projeta-se o compensador por atraso de fase para satisfazer a especificação do erro estacionário.

## Exemplo 4.9 (Objetivo do Projeto)

Projete um compensador por avanço e atraso de fase para o sistema da Figura 4.30, de modo que a resposta para entrada do tipo degrau na referência apresente:

- polos dominantes com coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  e frequência  $\omega_n = 2(\text{rad/s})$ ;
- erro no estado estacionário de 0,02.

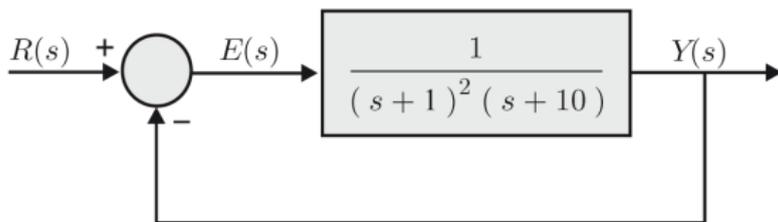


Figura 4.30 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada sem compensador.

Para que as especificações sejam satisfeitas os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado devem estar localizados em

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -1 \pm j\sqrt{3}. \quad (36)$$

Se os polos dominantes tiverem influência predominante na dinâmica do sistema, então a resposta ao degrau deve apresentar um sobressinal próximo de  $M_p \approx 16,3\%$  e um tempo de acomodação próximo de  $t_s \approx 3$  s (critério de 5%).

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

A função de transferência do compensador por avanço de fase é dada por

$$G_{av}(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right). \quad (37)$$

Cancelando o zero do compensador com um dos polos em  $s = -1$  do processo, a função de transferência de malha aberta resulta como

$$G_{ma}(s) = k_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \frac{1}{(s + 1)^2(s + 10)} = \frac{k_c}{(s + p_c)(s + 1)(s + 10)}. \quad (38)$$

Pela condição de fase

$$\angle G_{ma}(s) = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ \quad (39)$$

ou

$$-\angle s + p_c - \angle s + 1 - \angle s + 10 = \pm m 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - \angle s + 1 - \angle s + 10 = \angle s + p_c. \quad (40)$$

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

No polo dominante de malha fechada  $s = -1 + j\sqrt{3}$  tem-se que

$$\angle s + p_c = \angle -1 + j\sqrt{3} + p_c = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{p_c - 1}\right) = 180^\circ - 90^\circ - 10,9^\circ = 79,1^\circ. \quad (41)$$

Calculando a tangente dos dois membros da Equação (41), obtém-se

$$\frac{\sqrt{3}}{p_c - 1} = \tan(79,1^\circ) = 5,1962 \Rightarrow p_c = \frac{\sqrt{3}}{5,1962} + 1 \approx 1,3333. \quad (42)$$

O valor do ganho  $k_c > 0$  pode ser obtido por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{k_c}{(s + 1,3333)(s + 1)(s + 10)} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}j} = 1 \quad (43)$$
$$\Rightarrow k_c = |s + 1,3333||s + 1||s + 10|_{s=-1+j\sqrt{3}j} \Rightarrow k_c = 28.$$

Portanto, a função de transferência do compensador por avanço de fase é dada por

$$G_{av}(s) = 28 \left( \frac{s + 1}{s + 1,3333} \right). \quad (44)$$

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

O lugar das raízes do sistema com o compensador (44) é apresentado na Figura 4.31.

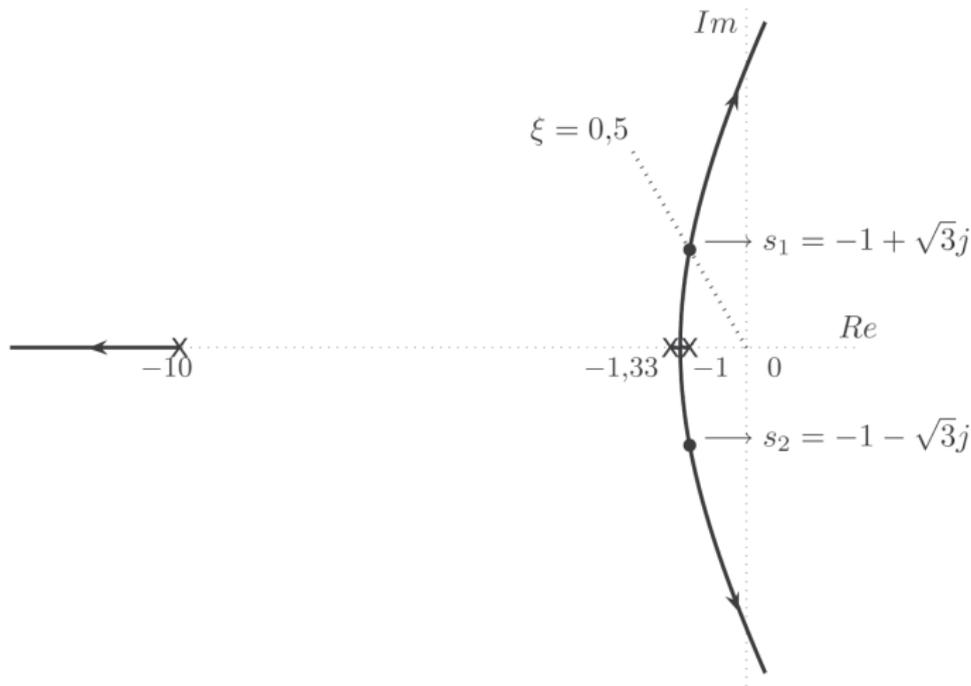


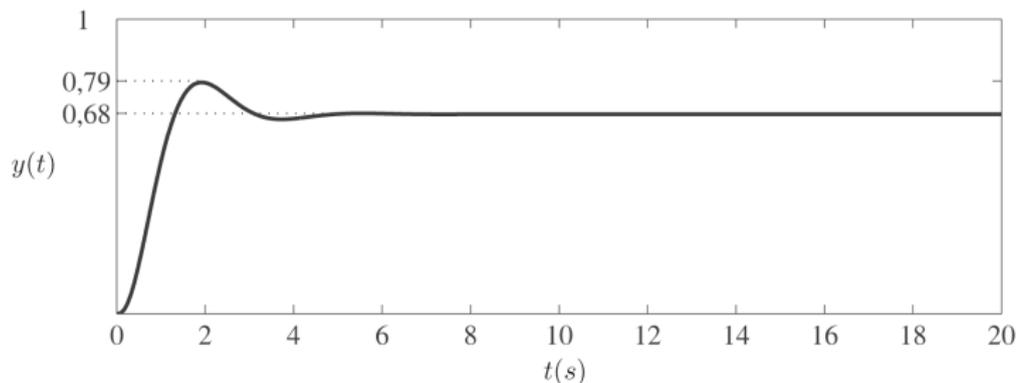
Figura 4.31 Lugar das raízes com o compensador por avanço de fase.

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

A função de transferência de malha fechada apenas com o compensador por avanço de fase é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{28}{(s + 1,3333)(s + 1)(s + 10) + 28}, \quad (45)$$

cuja resposta ao degrau unitário é apresentada na Figura 4.32. Note que o sistema em malha fechada com o compensador por avanço de fase apresenta um transitório próximo das especificações (sobressinal  $M_p \approx 16,2\%$  e tempo de acomodação  $t_s \approx 3$  s, pelo critério de 5%). Porém, o erro estacionário ainda é elevado, pois  $e(\infty) = 1 - 0,68 = 0,32$ .



**Figura 4.32** Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada apenas com o compensador por avanço de fase.

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

A seguir, deve-se projetar um compensador por atraso de fase de modo a reduzir o erro estacionário para 0,02, sem que o transitório do sistema com o compensador por avanço de fase tenha alteração significativa.

Supondo que a função de transferência do compensador por atraso de fase seja dada por

$$G_{at}(s) = k_{at} \left( \frac{s + z_{at}}{s + p_{at}} \right), \quad (46)$$

a função de transferência de malha aberta com o compensador por avanço e atraso de fase é

$$G_{ma}(s) = \frac{k_{at}(s + z_{at})}{(s + p_{at})} \cdot 28 \frac{(s+1)}{(s + 1,3333)} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+10)}. \quad (47)$$

Logo, o erro estacionário  $e(\infty)$  com o compensador por avanço e atraso de fase vale

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{28k_{at}(s + z_{at})}{(s + p_{at})(s + 1,3333)(s + 1)(s + 10)}} = \frac{1}{1 + \frac{2,1k_{at}z_{at}}{p_{at}}} = 0,02. \quad (48) \end{aligned}$$

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

Para que o transitório não tenha mudança significativa com o compensador por atraso de fase, a posição dos polos de malha fechada dominantes deve ser praticamente a mesma no lugar das raízes. Para isso, o ganho  $k_{at}$  deve valer aproximadamente 1. Assim,

$$\frac{1}{1 + \frac{2,1z_{at}}{p_{at}}} \approx 0,02 \Rightarrow \frac{1}{0,02} \approx 1 + \frac{2,1z_{at}}{p_{at}} \Rightarrow \frac{z_{at}}{p_{at}} \approx \frac{49}{2,1} \approx 23,3333. \quad (49)$$

Escolhendo arbitrariamente o polo  $p_{at} = 0,01$  próximo da origem, obtém-se  $z_{at} = 0,2333$ .

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

Na Figura 4.33 é apresentado o lugar das raízes do sistema compensado. Traçando uma reta pelo coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  ( $\beta \approx \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$ ) obtêm-se os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado, que estão em  $s_{1,2} = -0,93 \pm 1,61j$ .

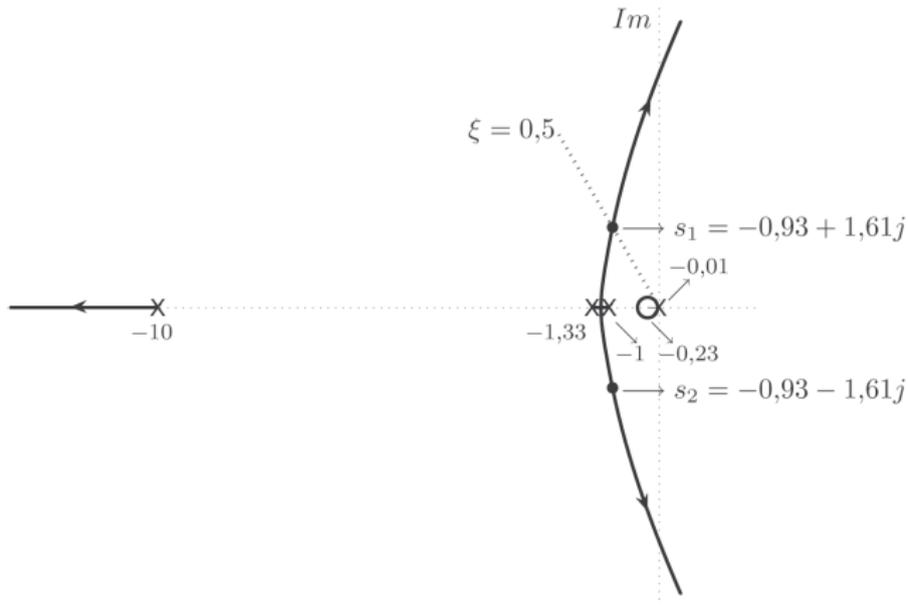


Figura 4.33 Lugar das raízes do sistema compensado.

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

O ganho  $k_{at}$  pode ser ajustado pela condição de módulo

$$\left| \frac{28k_{at}(s + 0,2333)}{(s + 1,3333)(s + 0,01)(s + 1)(s + 10)} \right|_{s=-0,93+1,61j} = 1 \Rightarrow k_{at} \approx 0,93. \quad (50)$$

Portanto, a função de transferência do compensador por avanço e atraso de fase é dada pelo produto das Equações (44) e (46), ou seja,

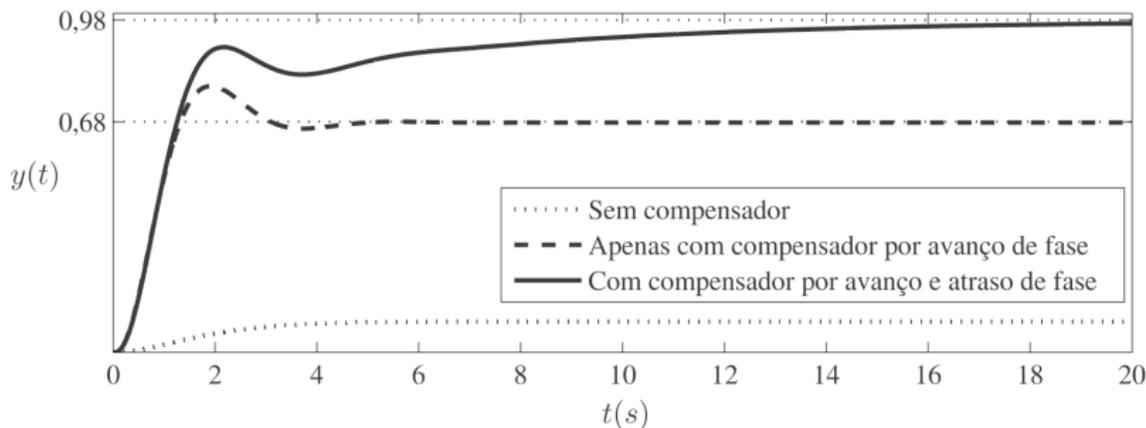
$$G_c(s) = G_{av}(s)G_{at}(s) = \frac{26,04(s + 1)(s + 0,2333)}{(s + 1,3333)(s + 0,01)}. \quad (51)$$

A função de transferência de malha fechada do sistema compensado resultante é de quarta ordem e é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{26,04(s + 0,2333)}{s^4 + 12,34s^3 + 24,79s^2 + 39,62s + 6,21} \\ &= \frac{26,04(s + 0,2333)}{(s + 0,17)(s + 10,30)(s + 0,93 + 1,61j)(s + 0,93 - 1,61j)}. \end{aligned} \quad (52)$$

## Exemplo 4.9 (Análise e Solução)

Na Figura 4.34 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada sem compensador, apenas com o compensador por avanço (44) e com o compensador por avanço e atraso (51). A inclusão do compensador por atraso aumenta a ordem do sistema de 3 para 4, acrescentando um polo em  $s = -0,17$  e um zero em  $s = -0.2333$  próximos dos polos dominantes, afetando dessa maneira a resposta transitória. Porém, o erro estacionário foi reduzido de acordo com o esperado.



**Figura 4.34** Respostas ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada sem compensador, apenas com o compensador por avanço (4.87) e com o compensador por avanço e atraso (4.94).