

EA721 - Princípios de Controle e
Servomecanismo
Parte 2.1: Revisão de Lugar das Raízes

Professora: Cecília de Freitas Morais
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

- O método do lugar geométrico das raízes foi criado por W. R. Evans e consiste em um gráfico, construído a partir do conhecimento dos polos e zeros do sistema em malha aberta, que permite visualizar de que forma os polos do sistema em malha fechada variam quando se altera o valor do **ganho** do sistema em malha aberta;
- Este método é um excelente instrumento de análise dos efeitos dinâmicos da realimentação de sinais, sem que para isso seja necessário calcular soluções de equações diferenciais lineares.
- Atualmente esta técnica é aplicada no projeto de sistemas de controle por meio de pacotes computacionais.

O método do Lugar Geométrico das Raízes (L.G.R.)

Considere o sistema em malha fechada da Figura abaixo

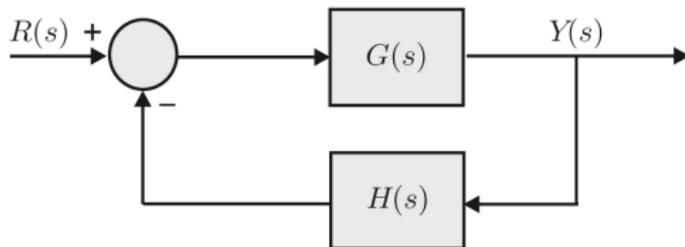


Figura 4.1 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Sabendo que

$$Y(s) = G(s) (R(s) - H(s)Y(s))$$
$$\Rightarrow Y(s) (1 + G(s)H(s)) = G(s)R(s),$$

a função de transferência de malha fechada da entrada $R(s)$ para a saída $Y(s)$ é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (1)$$

Os polos de malha fechada são as raízes da equação característica (denominador da função de transferência igual a 0):

$$1 + G(s)H(s) = 0, \quad (2)$$

ou, na forma complexa

$$G(s)H(s) = -1 + j0, \quad (3)$$

em que $G(s)H(s)$ é a função de transferência em malha aberta do sistema da Figura 4.1.

O método do Lugar Geométrico das Raízes (L.G.R.)

Como é complexa, a Equação (3) pode ser separada em módulo:

$$\begin{aligned}|G(s)H(s)| &= |-1 + j0| = \sqrt{\operatorname{Re}\{(-1 + j0)\}^2 + \operatorname{Im}\{(-1 + j0)\}^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

e fase:

$$\angle G(s)H(s) = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}\{G(s)H(s)\}}{|G(s)H(s)|} \right) = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{0}{1} \right) = \operatorname{sen}^{-1}(0) = 180^\circ$$

$$\angle G(s)H(s) = \operatorname{cos}^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re}\{G(s)H(s)\}}{|G(s)H(s)|} \right) = \operatorname{cos}^{-1} \left(\frac{-1}{1} \right) = \operatorname{cos}^{-1}(-1) = 180^\circ$$

Condição de módulo

$$|G(s)H(s)| = 1. \quad (4)$$

Condição de fase

$$\begin{aligned}\angle G(s)H(s) &= 180^\circ \pm r360^\circ \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \\ &= \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ\end{aligned} \quad (5)$$

O método do Lugar Geométrico das Raízes (L.G.R.)

A função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ pode ser escrita de forma fatorada, evidenciando seus polos e zeros

$$G(s)H(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (6)$$

em que

- z_1, z_2, \dots, z_m são os zeros de malha aberta,
- p_1, p_2, \dots, p_n são os polos de malha aberta e
- $k > 0$ é o coeficiente de ganho, suposto positivo.

Condição de Módulo

Da equação (6), a condição de módulo pode ser reescrita como

$$|G(s)H(s)| = \frac{k|s - z_1||s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1||s - p_2| \dots |s - p_n|} = 1. \quad (7)$$

Assim, o valor do ganho k , associado a qualquer ponto do plano s , pode ser obtido por

$$k = \frac{|s - p_1||s - p_2| \dots |s - p_n|}{|s - z_1||s - z_2| \dots |s - z_m|}. \quad (8)$$

Condição de Fase

Da equação (6), a condição de fase pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \angle G(s)H(s) &= \angle s - z_1 + \angle s - z_2 + \dots + \angle s - z_m \\ &\quad - \angle s - p_1 - \angle s - p_2 - \dots - \angle s - p_n = \\ &= 180^\circ \pm r360^\circ \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (9) \end{aligned}$$

Conforme representado na Figura 4.2 abaixo, a fase do vetor $s - p$ é o ângulo θ , medido no sentido anti-horário a partir do eixo real.

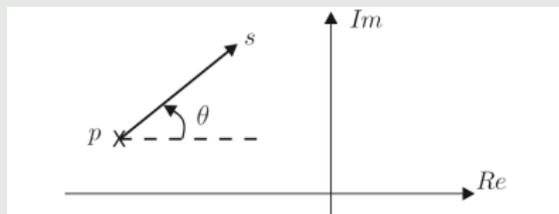


Figura 4.2 Fase θ do número complexo $s - p$.

O que é o lugar geométrico das raízes?

O lugar geométrico das raízes (L.G.R.) é um gráfico no plano s que mostra a posição de todos os polos de malha fechada quando o ganho k varia de 0 a ∞ .

A condição de fase (9) é a condição geométrica que permite determinar se um dado ponto pertence ou não ao L.G.R.

Exemplo 4.1

Deseja-se determinar o lugar das raízes sobre o eixo real do sistema em malha fechada com realimentação unitária ($H(s) = 1$) da Figura 4.3.

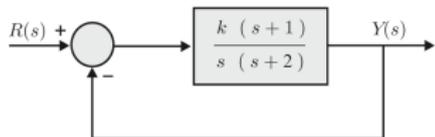


Figura 4.3 Sistema em malha fechada com realimentação unitária.

com função de transferência de malha aberta dada por

$$G(s)H(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{k(s+1)}{s(s+2)}. \quad (10)$$

Solução

A condição de fase é dada por

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ \\ &= \angle s + 1 - \angle s - \angle s + 2. \end{aligned}$$

Para verificar quais são os segmentos do eixo real que pertencem ao lugar das raízes, basta selecionar pontos de teste ao acaso (s_1, s_2, s_3 e s_4), conforme mostrado na Figura 4.4, e depois verificar quais são os pontos que satisfazem a condição de fase.

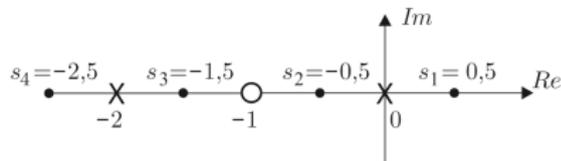


Figura 4.4 Pontos de teste do eixo real.

Exemplo 4.1

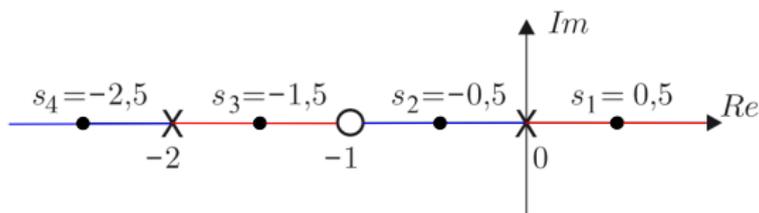


Figura 4.4 Pontos de teste do eixo real.

⇒ Para $s_1 = 0,5$:

$$\angle G(s) = \angle s_1 + 1 - \angle s_1 - \angle s_1 + 2 = 0^\circ$$

(Não é múltiplo ímpar de $\pm 180^\circ$)

⇒ Para $s_2 = -0,5$:

$$\angle G(s) = \angle s_2 + 1 - \angle s_2 - \angle s_2 + 2 = -180^\circ$$

(É múltiplo ímpar de $\pm 180^\circ$)

⇒ Para $s_3 = -1,5$:

$$\angle G(s) = \angle s_3 + 1 - \angle s_3 - \angle s_3 + 2 = 0^\circ$$

(Não é múltiplo ímpar de $\pm 180^\circ$)

⇒ Para $s_4 = -2,5$:

$$\angle G(s) = \angle s_4 + 1 - \angle s_4 - \angle s_4 + 2 = -180^\circ$$

(É múltiplo ímpar de $\pm 180^\circ$)

- Entre os pontos testados (s_1, s_2, s_3 e s_4) a condição de fase é satisfeita apenas para s_2 e s_4 .
- Note que a condição de fase também é satisfeita para qualquer outro ponto que for escolhido nos segmentos de reta entre 0 e -1 e entre -2 e $-\infty$.
- Portanto, o lugar das raízes de todos os polos de malha fechada sobre o eixo real se encontra nesses dois segmentos.

Exemplo 4.1

Os polos de malha fechada também podem ser calculados a partir da função de transferência de malha fechada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{k(s+1)}{s(s+2)}}{1 + \frac{k(s+1)}{s(s+2)}} = \frac{k(s+1)}{s^2 + (2+k)s + k}. \quad (11)$$

Variando-se o ganho k , pode-se obter os polos de malha fechada ($s = [-(2+k) \pm \sqrt{4-2k+k^2-4k}]/2$) de acordo com a tabela abaixo.

$k = 0$	$s_1 = 0$	$s_2 = -2$
$k = 0,1$	$s_1 = -0,05$	$s_2 = -2,05$
$k = 1$	$s_1 = -0,38$	$s_2 = -2,62$
$k = 5$	$s_1 = -0,81$	$s_2 = -6,19$
$k = 10$	$s_1 = -0,90$	$s_2 = -11,10$
$k = 100$	$s_1 = -0,99$	$s_2 = -101,01$
$k \rightarrow \infty$	$s_1 \rightarrow -1$	$s_2 \rightarrow -\infty$

Analisando-se a tabela acima, verifica-se que à medida que o ganho k varia de zero a infinito os polos de malha fechada s_1 e s_2 variam, respectivamente, de 0 a -1 e de -2 a $-\infty$.

Exemplo 4.1

O gráfico do lugar geométrico das raízes de todos os polos de malha fechada é representado pelas linhas grossas da Figura 4.5.

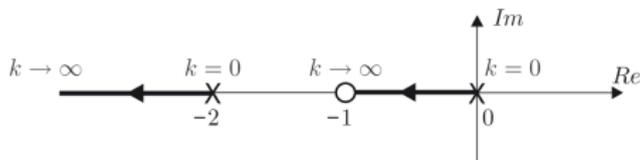


Figura 4.5 Lugar geométrico das raízes.

Analisando-se as Figuras 4.4 e 4.5 verifica-se que:

- À direita do polo $s = 0$ não há raízes, isto é, a quantidade de polos e zeros é nula (quantidade par). Logo, o segmento do intervalo de 0 a $+\infty$ não faz parte do lugar das raízes.
- À direita do zero $s = -1$ há 1 raiz (quantidade ímpar), isto é, há o polo em $s = 0$. Logo, o segmento do intervalo de -1 a 0 faz parte do lugar das raízes.
- À direita do polo $s = -2$ há 2 raízes (quantidade par), isto é, há o zero em $s = -1$ e o polo em $s = 0$. Logo, o segmento do intervalo de -2 a -1 não faz parte do lugar das raízes.
- Por fim, à direita de $s = -\infty$ há 3 raízes (quantidade ímpar), isto é, há o polo em $s = -2$, o zero em $s = -1$ e o polo em $s = 0$. Logo, o segmento do intervalo de $-\infty$ a -2 faz parte do lugar das raízes.

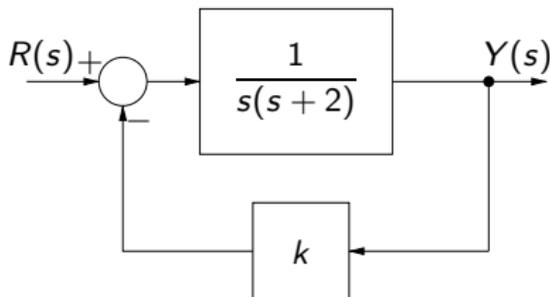
Conclusão parcial sobre o Lugar das raízes

Do Exemplo 4.1 conclui-se que:

- se o número de raízes (polos ou zeros) reais à direita do ponto de teste for **ímpar**, então o segmento que contém o ponto de teste **pertence** ao lugar das raízes;
- o lugar das raízes **começa em um polo e termina em um zero**, formando segmentos alternados ao longo do eixo real. Quando a quantidade de polos for maior que a de zeros, o lugar das raízes termina no infinito;
- o sentido das flechas do lugar das raízes indica o sentido dos valores crescentes do ganho k .

Exercício

Considere o sistema dinâmico linear descrito pelo seguinte diagrama de blocos.



- Determine a função de transferência em malha aberta e as raízes do sistema representado no diagrama de blocos acima.
- Determine a função de transferência em malha fechada e as raízes do sistema representado no diagrama de blocos acima.
- Faça uma tabela com os valores de k (para $k = 0, 1, 5, 10, 50, \infty$) e os polos (s_1 e s_2) em malha fechada (usando como modelo a tabela do slide 14).
- Desenhe o lugar geométrico das raízes do sistema usando como base os pontos calculados na tabela da letra (c). Observe que, para $k = 0$ a origem do lugar das raízes são os polos da função de transferência em malha aberta e conforme k aumenta (tende ao infinito) o lugar das raízes tende aos zeros do sistema (se não houver zeros, tende ao infinito).

Regras para traçar o lugar das raízes

Número de ramos (setas que ligam um polo a um zero)

Marcar os polos e zeros da função de transferência de malha aberta $G(s)H(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$ com os símbolos “x” e “o”, respectivamente. O número de ramos é igual ao número de polos de $G(s)H(s)$, ou seja, número de raízes de $D(s) = 0$.

Simetria

Como o polinômio do denominador da função de transferência de malha fechada ($1 + G(s)H(s)$ ou $D(s) + kN(s)$) tem coeficientes reais, as suas raízes podem ser apenas reais ou complexas conjugadas. Logo, o lugar das raízes é sempre simétrico em relação ao eixo real do plano complexo (as raízes e ramos que aparecem no semiplano superior do plano complexo são espelhadas no semiplano inferior, assim como mostrado na Figura 4.6 do slide seguinte).

Regras para traçar o lugar das raízes

Lugar das raízes sobre o eixo real

Pares de zeros ou polos complexos conjugados não afetam a **condição de fase (9)** sobre o eixo real. Conforme se pode verificar no exemplo da Figura 4.6, a soma dos ângulos de cada polo complexo com relação ao ponto de teste s é

$$\theta_1 + \theta_2 = 360^\circ \neq 180^\circ \pm r360^\circ (r = 0,1,2, \dots) \quad (12)$$

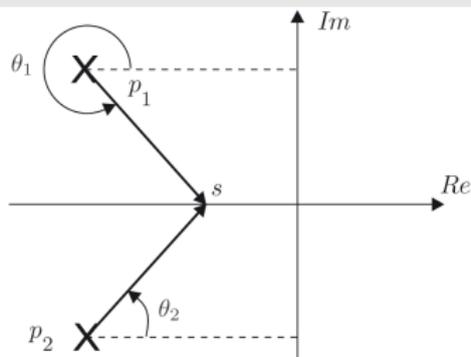


Figura 4.6 Ângulos de um par de polos complexos conjugados.

Regras para traçar o lugar das raízes

Lugar das raízes sobre o eixo real

Por outro lado, assim como mencionado anteriormente, com relação aos polos e zeros reais, sabe-se que:

- cada zero ou cada polo real de malha aberta contribui com uma fase de 180° , se estiver à direita de um ponto de teste s ;
- cada zero ou cada polo real de malha aberta não afeta a condição de fase, se estiver à esquerda de um ponto de teste s .

Conclusão: Um ponto de teste s **sobre o eixo real** pertence ao lugar das raízes se o número total de polos e zeros à direita deste ponto for ímpar.

Regras para traçar o lugar das raízes

Pontos de início e término

O lugar das raízes consiste no lugar geométrico de todos os polos de malha fechada para $0 < k < \infty$. O ponto de início ou partida corresponde a $k \rightarrow 0$ e o ponto de término ou chegada corresponde a $k \rightarrow \infty$.

Os polos de malha fechada são as raízes da equação característica

$$\begin{aligned}1 + G(s)H(s) &= 0 \\ \Rightarrow 1 + k \frac{N(s)}{D(s)} &= 0 \\ \Rightarrow D(s) + kN(s) &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \\ + k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m) &= 0.\end{aligned} \quad (13)$$

Para $k \rightarrow 0$ as raízes da Equação (13) tendem para as raízes de

$$(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0.$$

Conclusão 1: O lugar das raízes **começa** nos polos de malha aberta.

Da condição de módulo apresentada anteriormente $|G(s)H(s)| = 1$ tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{k|s - z_1||s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1||s - p_2| \dots |s - p_n|} &= 1 \Rightarrow \\ \frac{|s - z_1||s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1||s - p_2| \dots |s - p_n|} &= \frac{1}{k}.\end{aligned} \quad (14)$$

Para $k \rightarrow \infty$ as raízes da Equação (14) tendem para as raízes de

$$|s - z_1||s - z_2| \dots |s - z_m| = 0.$$

Conclusão 2: O lugar das raízes **termina** nos zeros de malha aberta.

Regras para traçar o lugar das raízes

Assíntotas

O número de ramos é igual ao número de polos. Como o número n de polos é normalmente maior que o número m de zeros, então m ramos terminam nos zeros e $n - m$ ramos terminam no infinito, seguindo assíntotas (retas que servem como aproximação para o lugar das raízes associado a um zero no infinito).

Portanto, **o número de assíntotas é igual a $n - m$.**

Da condição de fase, tem-se que:

$$\begin{aligned} \angle s - z_1 + \angle s - z_2 + \cdots + \angle s - z_m - \angle s - p_1 - \angle s - p_2 - \cdots - \angle s - p_n \\ = 180^\circ \pm q360^\circ \quad (q = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (15)$$

Num ponto s suficientemente afastado, tal que o seu módulo seja muito maior que o módulo dos polos e zeros de malha aberta, os ângulos da Equação (15) podem ser considerados aproximadamente iguais a um ângulo α qualquer, ou seja,

$$\begin{aligned} m\alpha - n\alpha &= \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ \\ \alpha_r &= (2r - 1) \frac{180^\circ}{n - m}, r = 1, 2, \dots, n - m. \end{aligned} \quad (16)$$

Além disso, pode-se demonstrar que as assíntotas cruzam o eixo real no ponto

$$S_c = \frac{\sum(\text{polos de } G(s)H(s)) - \sum(\text{zeros de } G(s)H(s))}{n - m} = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{j=1}^m (z_j)}{n - m}. \quad (17)$$

Regras para traçar o lugar das raízes

Pontos de partida e chegada sobre o eixo real (pontos de ramificação)

- Se existirem dois polos de malha aberta adjacentes sobre o eixo real e se o segmento entre eles fizer parte do lugar das raízes, então haverá pelo menos um ponto de partida neste segmento.
- Se existirem dois zeros de malha aberta adjacentes sobre o eixo real e se o segmento entre eles fizer parte do lugar das raízes, então haverá pelo menos um ponto de chegada neste segmento (também ocorre com zeros no infinito).

Os **pontos de partida ou chegada sobre o eixo real** são raízes múltiplas da equação característica, ou seja, solução de

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + k \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

$$\Rightarrow D(s) + kN(s) = 0,$$

e de sua derivada

$$\dot{D}(s) + k\dot{N}(s) = 0.$$

Reescrevendo

$$k = -\frac{D(s)}{N(s)} \text{ e } k = -\frac{\dot{D}(s)}{\dot{N}(s)}. \quad (18)$$

Igualando as equações, tem-se

$$\dot{N}(s)D(s) - \dot{D}(s)N(s) = 0 \quad (19)$$

Obs: A solução da Equação (19) é uma condição necessária, mas não suficiente para a existência de pontos de partida ou de chegada, ou seja, se uma raiz da Equação (19) não pertencer ao lugar das raízes do eixo real, então essa raiz não corresponde nem a um ponto de partida nem a um ponto de chegada.

Regras para traçar o lugar das raízes

Ângulo de partida de um polo complexo e de chegada em um zero complexo

Permite determinar a direção dos ramos do lugar das raízes nas proximidades dos polos e zeros complexos conjugados. Escolhendo-se um ponto de teste nas proximidades de um polo ou zero complexo pode-se considerar que a soma das contribuições angulares de todos os outros polos e zeros permanece invariável. Assim, da condição de fase (15) o ângulo de partida de um polo complexo p_1 pode ser determinado como

$$\angle s - p_1 = \angle s - z_1 + \angle s - z_2 + \cdots + \angle s - z_m - \angle s - p_2 - \cdots - \angle s - p_n$$

\mp múltiplo ímpar de 180° . (20)

Da mesma forma, o ângulo de chegada em um zero complexo z_1 pode ser determinado como

$$\angle s - z_1 = -\angle s - z_2 - \cdots - \angle s - z_m + \angle s - p_1 + \angle s - p_2 + \cdots + \angle s - p_n$$

\pm múltiplo ímpar de 180° . (21)

Ex. 1: Lugar das raízes com 3 polos: ângulos de partida

Calcule os ângulos de partida do sistema com equação característica

$$G(s)H(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0 \Rightarrow (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) + k = 0$$

em que $p_1 = -j$, $p_2 = j$, $p_3 = -1$.

Solução:

Observe que pelas informações do enunciado, o sistema não possui nenhum zero e possui 3 polos, ou seja, $D(s) = (s+j)(s-j)(s+1)$ e $N(s) = 1$.

Como não há zeros, a expressão de ângulo de partida dos polos se reduz a

$$\begin{aligned} \angle s - p_1 &= \cancel{\angle s - z_1} + \cancel{\angle s - z_2} + \cdots + \cancel{\angle s - z_m} - \angle s - p_2 - \angle s - p_3 \mp r180^\circ \\ \angle s - p_1 &= -\angle s - p_2 - \angle s - p_3 \mp r180^\circ, \quad s \approx p_1 \end{aligned}$$

para o polo p_1 e

$$\begin{aligned} \angle s - p_2 &= -\angle s - p_1 - \angle s - p_3 \mp r180^\circ, \quad s \approx p_2 \\ \angle s - p_3 &= -\angle s - p_1 - \angle s - p_2 \mp r180^\circ, \quad s \approx p_3 \end{aligned}$$

para os polos p_2 e p_3 .

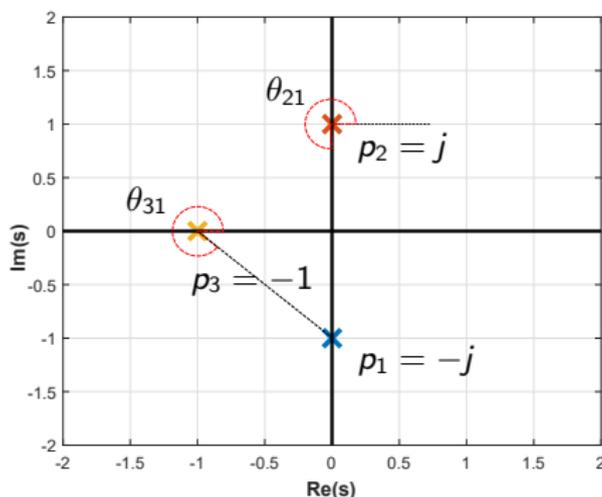
Ex. 1: Lugar das raízes com 3 polos: ângulos de partida

Graficamente, observe que o ângulo entre o polo p_2 e p_1 é $\theta_{21} = 270^\circ$, enquanto o ângulo entre o polo p_3 e p_1 é $\theta_{31} = 360^\circ - \tan^{-1}(1) = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$, ou seja,

$$\begin{aligned} \angle s - p_1 &= -\angle s - p_2 - \angle s - p_3 + r180^\circ, \quad s \approx p_1 \\ \angle s - p_1 &= r180^\circ - 270^\circ - 315^\circ = r180^\circ - 585^\circ \end{aligned}$$

Para que $\angle s - p_1 \in [-180^\circ, 180^\circ]$, escolhemos $r = 3$:

$$\angle s - p_1 = 3 \cdot 180^\circ - 585^\circ = 540^\circ - 585^\circ = -45^\circ.$$



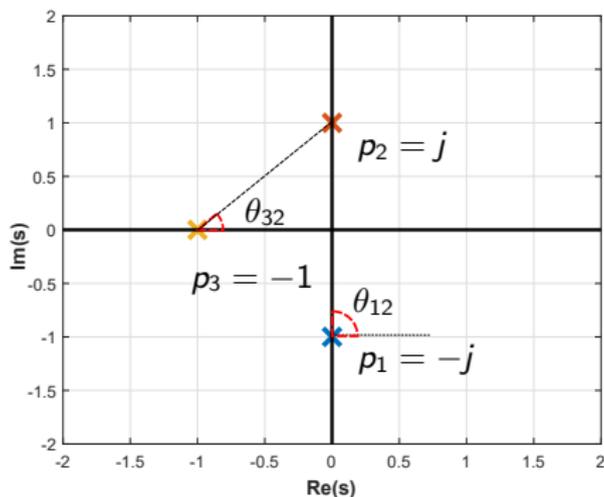
Ex. 1: Lugar das raízes com 3 polos: ângulos de partida

Graficamente, observe que o ângulo entre o polo p_1 e p_2 é $\theta_{12} = 90^\circ$, enquanto o ângulo entre o polo p_3 e p_2 é $\theta_{32} = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$, ou seja,

$$\begin{aligned}\angle s - p_2 &= -\angle s - p_1 - \angle s - p_3 + r180^\circ, \quad s \approx p_2 \\ \angle s - p_2 &= r180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = r180^\circ - 135^\circ\end{aligned}$$

Para que $\angle s - p_2 \in [-180^\circ, 180^\circ]$, escolhemos $r = 1$:

$$\angle s - p_2 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$



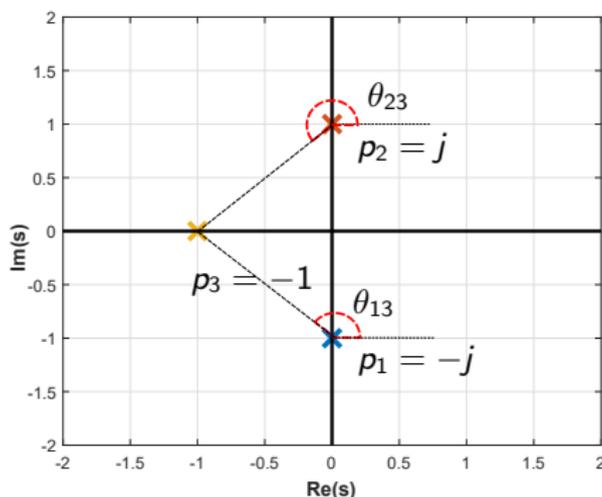
Ex. 1: Lugar das raízes com 3 polos: ângulos de partida

Graficamente, observe que o ângulo entre o polo p_1 e p_3 é $\theta_{13} = 90^\circ + \tan^{-1}(1) = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, enquanto o ângulo entre o polo p_2 e p_3 é $\theta_{23} = 180^\circ + \tan^{-1}(1) = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$, ou seja,

$$\begin{aligned}\underline{/s - p_3} &= -\underline{/s - p_1} \overset{\theta_{13}}{-} \underline{/s - p_2} \overset{\theta_{23}}{+} r180^\circ, \quad s \approx p_3 \\ \underline{/s - p_3} &= r180^\circ - 135^\circ - 225^\circ = r180^\circ - 360^\circ\end{aligned}$$

Para que $\underline{/s - p_2} \in [-180^\circ, 180^\circ]$, escolhamos $r = 3$:

$$\underline{/s - p_3} = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ.$$



Ex. 1: Lugar das raízes com 3 polos: ângulos de partida (Matlab)

Command Window

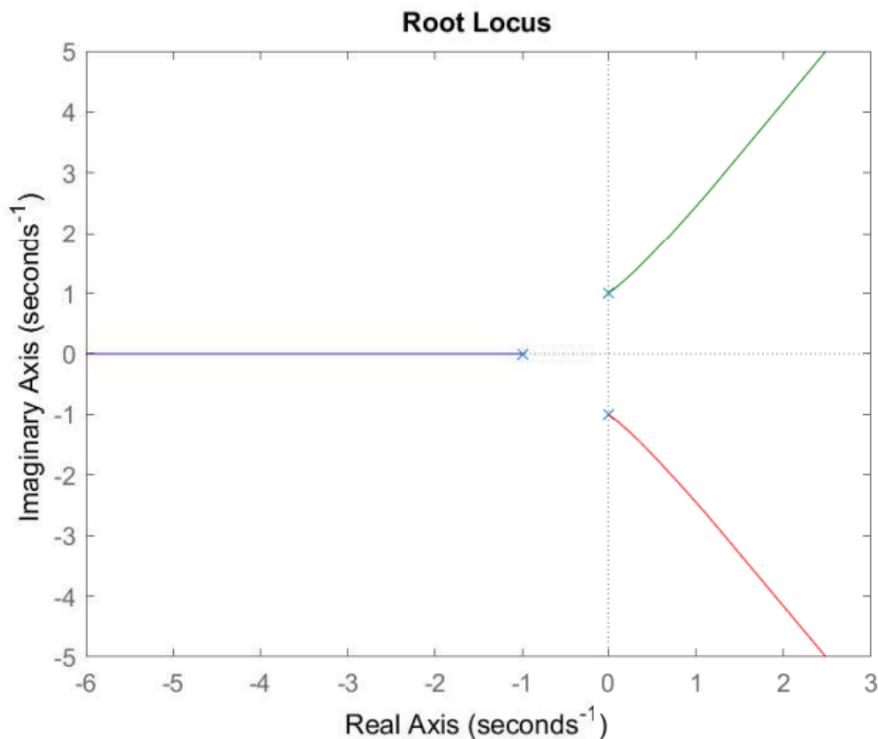
```
>> GH=tf(1,[1 0+1i])*tf(1,[1 0-1i])*tf(1,[1 1])  
GH =
```

$$\frac{1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> rlocus(GH)
```

Ex. 1: Lugar das raízes com 3 polos: ângulos de partida (Matlab)



Ex. 2: LGR com 3 polos e 2 zeros: ângulos de chegada

Calcule os ângulos de chegada do sistema com equação característica

$$\begin{aligned}G(s)H(s) &= k \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0 \\ &\Rightarrow (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) + k(s - z_1)(s - z_2) = 0 \quad (22)\end{aligned}$$

em que $p_1 = -j$, $p_2 = j$, $p_3 = -1$, $z_1 = 0.5 + 0.5j$, $z_2 = 0.5 - 0.5j$.

Solução:

Observe que pelas informações do enunciado, o sistema possui dois zeros e 3 polos, ou seja,

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = (s + j)(s - j)(s + 1) \text{ e}$$

$$N(s) = (s - z_1)(s - z_2) = (s - 0.5 - 0.5j)(s - 0.5 + 0.5j).$$

A expressão de ângulo de chegada nos zeros se reduz a

$$\underline{\angle s - z_1} = -\underline{\angle s - z_2} + \underline{\angle s - p_1} + \underline{\angle s - p_2} + \underline{\angle s - p_3} \pm r180^\circ, \quad s \approx z_1$$

$$\underline{\angle s - z_2} = -\underline{\angle s - z_1} + \underline{\angle s - p_1} + \underline{\angle s - p_2} + \underline{\angle s - p_3} \pm r180^\circ, \quad s \approx z_2$$

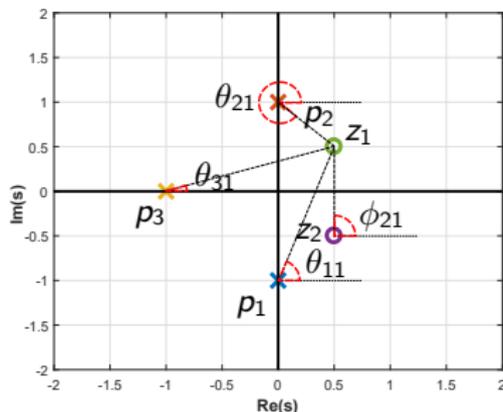
em que r é um inteiro ímpar.

Ex. 2: LGR com 3 polos e 2 zeros: ângulos de chegada

Graficamente, observe que o ângulo entre o polo p_1 e o zero z_1 é $\theta_{11} = \tan^{-1}((0.5 - (-1))/0.5) = \tan^{-1}(1.5/0.5) = 71.6^\circ$, entre p_2 e z_1 é $\theta_{21} = \tan^{-1}((0.5 - 1)/0.5) = \tan^{-1}(-1) = 315^\circ$, entre p_3 e z_1 é $\theta_{31} = \tan^{-1}(0.5/(0.5 - (-1))) = \tan^{-1}(0.5/1.5) = 18.4^\circ$, e entre o zero z_2 e z_1 é $\phi_{21} = \tan^{-1}((0.5 - (-0.5))/(0.5 - 0.5)) = \tan^{-1}(+\infty) = 90^\circ$, ou seja,

$$\begin{aligned} \angle s - z_1 &= \pm r 180^\circ - \left(\angle s - z_2 + \angle s - p_1 + \angle s - p_2 + \angle s - p_3 \right) \\ \angle s - z_1 &= \pm r 180^\circ - 90^\circ + 71.6^\circ + 315^\circ + 18.4^\circ = \pm r 180^\circ + 315^\circ \end{aligned}$$

Para que $\angle s - z_1 \in [-180^\circ, 180^\circ]$, escolhemos $r = 1$, implicando $-180^\circ + 315^\circ = 135^\circ$, portanto $\angle s - z_1 = 135^\circ$.

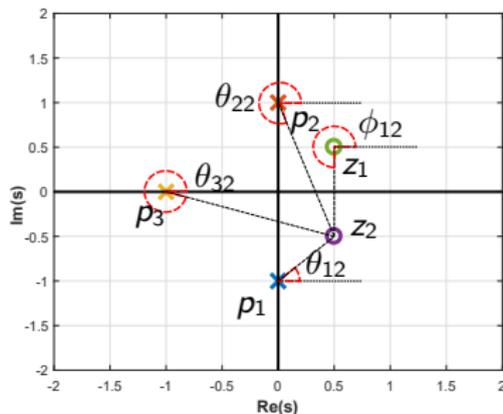


Ex. 2: LGR com 3 polos e 2 zeros: ângulos de chegada

Graficamente, observe que o ângulo entre o polo p_1 e o zero z_2 é $\theta_{12} = \tan^{-1}((-0.5 - (-1))/0.5) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$, entre p_2 e z_2 é $\theta_{22} = \tan^{-1}((-0.5 - 1)/0.5) = \tan^{-1}(-3) = 288,4^\circ$, entre p_3 e z_2 é $\theta_{32} = \tan^{-1}(-0.5/(0.5 - (-1))) = \tan^{-1}(-0.5/1.5) = 341,6^\circ$, e entre o zero z_1 e z_2 é $\phi_{12} = \tan^{-1}((-0.5 - 0.5)/(0.5 - 0.5)) = \tan^{-1}(-\infty) = 270^\circ$, ou seja,

$$\begin{aligned} \angle s - z_2 &= \pm r 180^\circ - \angle s - z_1 + \angle s - p_1 + \angle s - p_2 + \angle s - p_3 \\ \angle s - z_2 &= \pm r 180^\circ - 270^\circ + 45^\circ + 288,4^\circ + 341,6^\circ = \pm r 180^\circ + 405^\circ \end{aligned}$$

Para que $\angle s - z_2 \in [-180^\circ, 180^\circ]$, escolhemos $r = 3$, implicando $-540^\circ + 405^\circ = -135^\circ$, portanto $\angle s - z_2 = -135^\circ$.



Ex. 2: LGR com 3 polos e 2 zeros (Matlab)

Command Window

```
>> GH=tf([1 (-0.5 -0.5*j)],[1 0+j*1])*tf([1 (-0.5+0.5*j)],[1 0-j*1])*tf(1,[1 1])
```

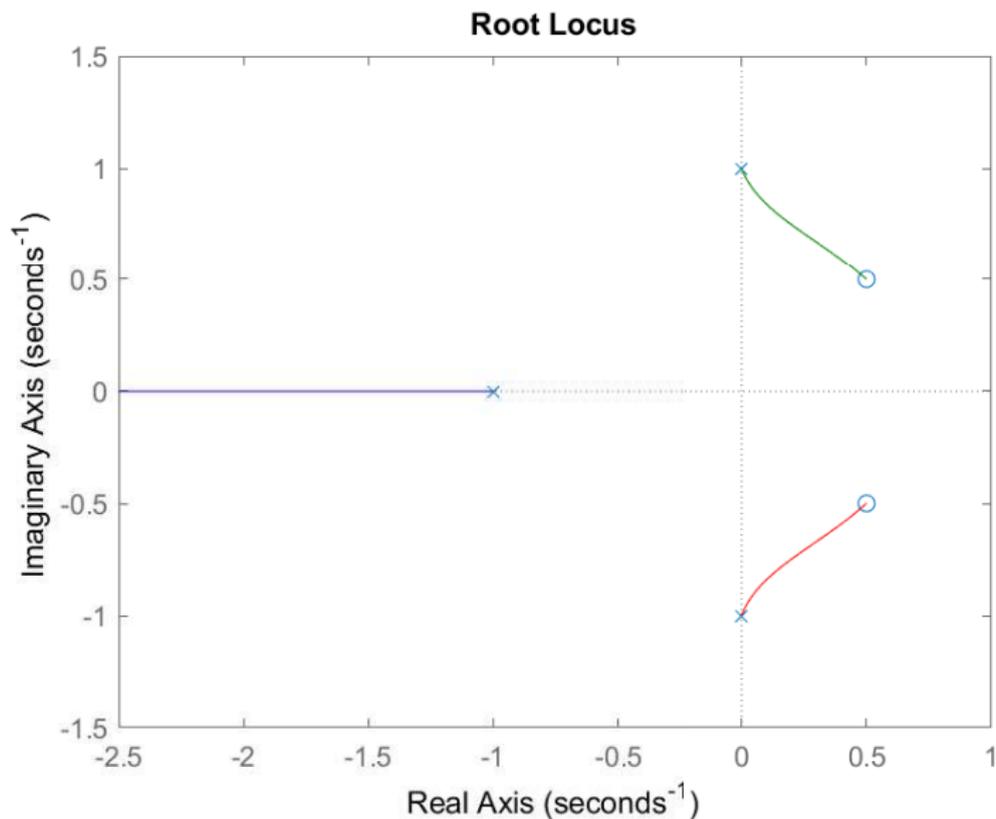
```
GH =
```

$$\frac{s^2 - s + 0.5}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> rlocus(GH)
```

Ex. 2: LGR com 3 polos e 2 zeros (Matlab)



Resumo das propriedades do lugar das raízes

- Marcar os n polos (p_1, p_2, \dots, p_n) e m zeros (z_1, z_2, \dots, z_m) da função de transferência de malha aberta ($G_{ma}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$) respectivamente com \times e \circ no plano s ;
- Condição de fase: $\sum_{r=1}^m \angle(s - z_r) - \sum_{r=1}^n \angle(s - p_r) = \pm 180^\circ$
- Condição de módulo: $k = \frac{\prod_{r=1}^m |s - z_r|}{\prod_{r=1}^n |s - p_r|}$
- O número de ramos no lugar das raízes = número de polos (n) de $G_{ma}(s)$;
- O lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real;
- Eixo real: Um ponto de teste s sobre o eixo real pertence ao lugar das raízes se o número total de polos + zeros à direita for ímpar;
- O lugar das raízes começa nos polos de malha aberta (para $k = 0$) e termina nos zeros de malha aberta (para $k = \infty$);
- Número de assíntotas: $n - m$
- Ângulo das assíntotas: $\alpha_r = (2r - 1) \frac{180^\circ}{n - m}$, $r = 1, 2, \dots, n - m$;
- Encontro das assíntotas com eixo real: $S_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$
- Pontos de partida e/ou chegada sobre o eixo real são os valores de s que satisfazem a equação: $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$
- Cruzamento com o eixo imaginário: valores de $s = \pm j\omega$ solução da equação: $D(s) + kN(s) = 0$
- Ângulo de partida dos polos:

$$\underline{\angle s - p_i} = \sum_{r=1}^m \underline{\angle s - z_r} - \sum_{r=1, r \neq i}^n \underline{\angle s - p_r} \mp \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ, \quad s \approx p_i$$

- Ângulo de chegada nos zeros:

$$\underline{\angle s - z_i} = - \sum_{r=1, r \neq i}^m \underline{\angle s - z_r} + \sum_{r=1}^n \underline{\angle s - p_r} \mp \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ, \quad s \approx z_i$$

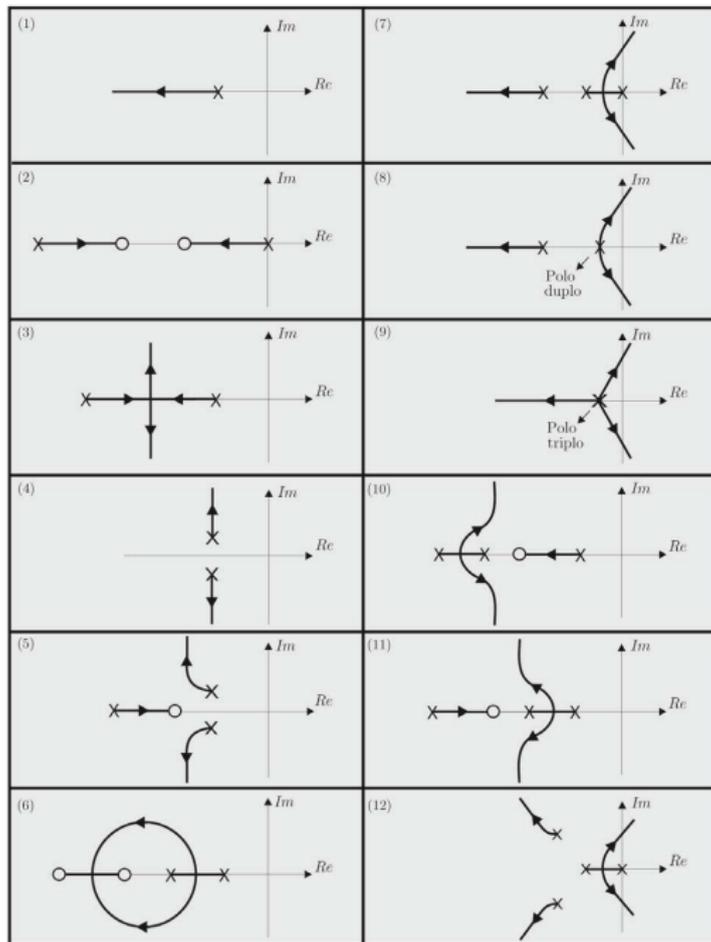


Figura 4.7 Lugar das raízes de alguns sistemas com realimentação negativa.

Exemplo 4.2 (Regras para o traçado do lugar das raízes)

Deseja-se desenhar o lugar das raízes do sistema da Figura 4.8.

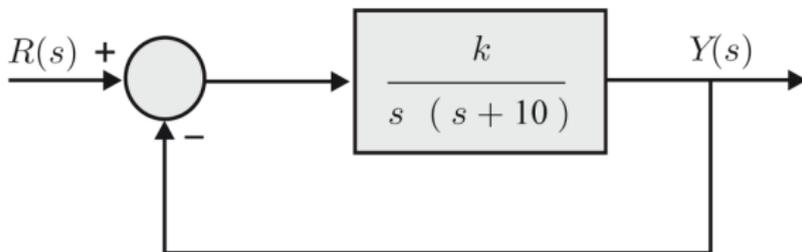


Figura 4.8 Sistema em malha fechada com realimentação unitária.

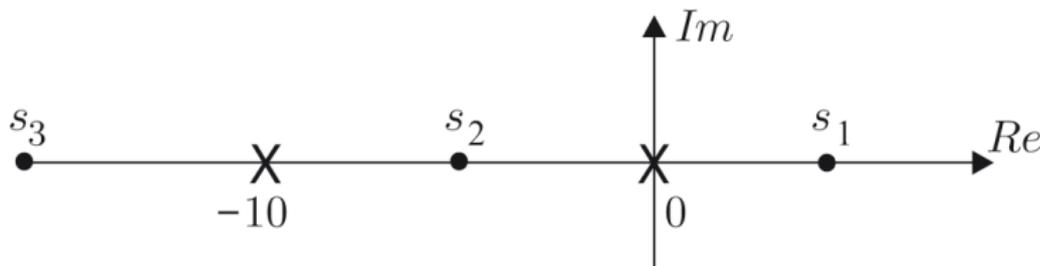
Exemplo 4.2 (Regras para o traçado do lugar das raízes)

Primeiramente calculando-se as raízes da malha aberta:

$$G_{ma} = \frac{k}{s(s+10)}$$

tem-se que o sistema não possui zeros e possui dois polos: $s = 0$ e $s = -10$. Marcando-se as raízes no plano s , tem-se a Figura 4.9.

Eixo real: A seguir devem-se selecionar pontos de teste s_1 , s_2 e s_3 nos segmentos do eixo real. Como à direita de s_1 não há raízes (quantidade par) e à direita de s_3 há 2 raízes (quantidade par), os segmentos de 0 a $+\infty$ e de -10 a $-\infty$ não fazem parte do lugar das raízes. Logo, apenas o segmento de -10 a 0 faz parte do lugar das raízes, pois à direita de s_2 há 1 raiz (quantidade ímpar).



Exemplo 4.2 (Regras para o traçado do lugar das raízes)

Assíntotas: Como a quantidade de polos ($n = 2$) é maior que a quantidade de zeros ($m = 0$), então $n - m = 2$ ramos terminam no infinito.

Ângulo das assíntotas:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{n - m} = \frac{180^\circ}{2 - 0} = 90^\circ \quad \text{e} \quad (23)$$
$$\alpha_2 = 3 \frac{180^\circ}{n - m} = 3 \frac{180^\circ}{2 - 0} = 270^\circ$$

Cruzamento das assíntotas com o eixo real:

$$S_c = \frac{(\sum_{i=1}^n p_i) - (\sum_{j=1}^m z_j)}{n - m}$$
$$= \frac{0 - 10}{2 - 0} = -5. \quad (24)$$

Ponto de partida sobre o eixo real:

O lugar das raízes começa nos polos e termina nos zeros de malha aberta, quando k varia de zero a infinito. Como há dois polos de malha aberta adjacentes sobre o eixo real ($s = 0$ e $s = -10$) e como o segmento entre eles faz parte do lugar das raízes, então há um ponto de partida neste segmento. A equação característica do sistema em malha fechada é dada por

$$D(s) + kN(s) = (s^2 + 10s) + k(1) = 0 \quad (25)$$

Aplicando a condição (19), obtém-se

$$\dot{N}(s)D(s) - \dot{D}(s)N(s) = -(2s + 10) = 0$$
$$\Rightarrow s = -\frac{10}{2} = -5 \quad (26)$$

Há um ponto de partida em $s = -5$.

Exemplo 4.2 (Regras para o traçado do lugar das raízes)

O gráfico do lugar geométrico das raízes apresenta o aspecto da Figura 4.10. Note que ao desenhar o gráfico do lugar das raízes o mesmo também deve satisfazer à propriedade de simetria com relação ao eixo real.

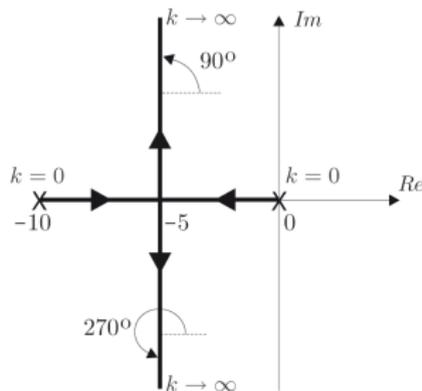


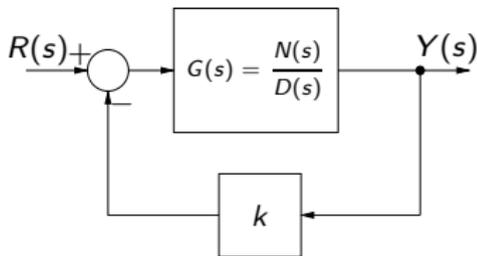
Figura 4.10 Lugar geométrico das raízes.

Analisando-se o gráfico da Figura 4.10 verifica-se que o sistema em malha fechada é sempre estável para qualquer $k > 0$, pois as linhas do lugar das raízes que representam os polos de malha fechada se localizam no semiplano esquerdo aberto do plano s .

Exemplo Extra 1¹

Use as regras para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle abaixo com

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s(s - 1 - j)(s - 1 + j)}$$



Solução:

1º Passo: marcar os polos e zeros da malha aberta no diagrama.

2º Passo: marcar o lugar das raízes sobre o eixo real.

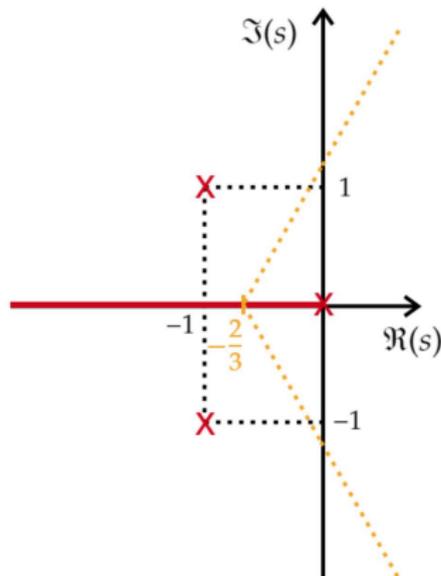
3º Passo: Determinar as assíntotas ($n - m = 3 - 0 = 3$), ponto de encontro:

$$s_c = \frac{(\sum_{i=1}^n p_i) - (\sum_{j=1}^m z_j)}{n - m} = -\frac{2}{3}$$

3º Passo (continuação): e os ângulos

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ, \quad \alpha_2 = 3 \frac{180^\circ}{3} = 180^\circ,$$

$$\alpha_3 = 5 \frac{180^\circ}{3} = 300^\circ$$



¹Esse exemplo foi retirado das notas de aula do Prof. Matheus Souza.

Exemplo Extra 1

Solução:

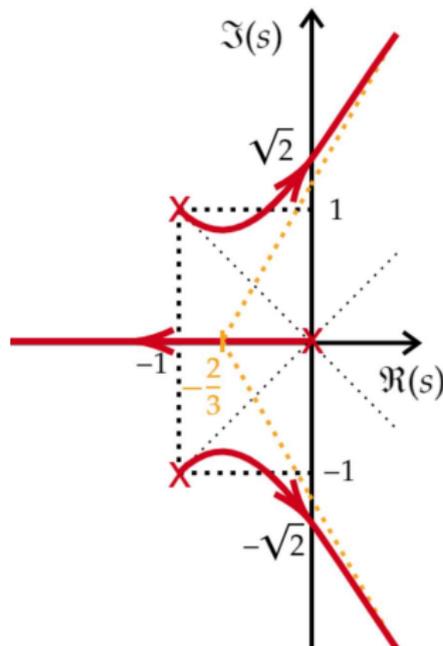
4º Passo: determinar ângulos de saída dos polos. Se θ for o ângulo de saída de $-1+j$, a condição de fase fornece:

$$\theta + 135^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = -45^\circ$$

Por simetria o ângulo de saída de $-1-j$ é 45° . Polos complexo conjugados não afetam o ângulo de saída de uma raiz sobre o eixo real, portanto o ângulo de saída de $s = 0$ é

$$\phi + 135^\circ - 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow \phi = 180^\circ$$

5º Passo: determinar os encontros de ramos. Neste caso, não temos 2 polos adjacentes sobre o eixo real.



Exemplo Extra 1

Solução:

6º Passo: cruzamento com o eixo imaginário. Aplicando a eq. característica ($s^3 + 2s^2 + 2s + k = 0$) na Tabela de Routh, tem-se que o ganho crítico é

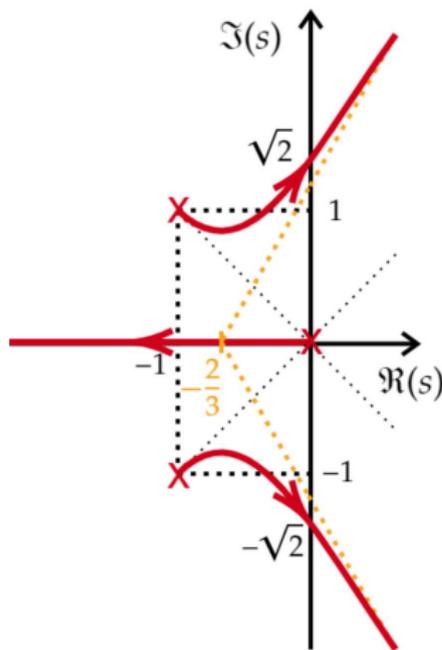
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & k \\ s & \frac{4-k}{2} & \\ s^0 & 2 & k \end{array} \quad k_c = 4 \text{ ou } k_c = 0.$$

Substituindo $s = j\omega$ na equação característica, tem-se:

$$(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + k = 0$$

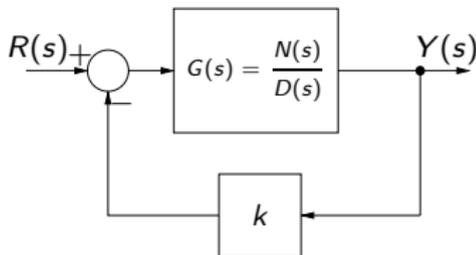
$$(-2\omega^2 + k) + j(-\omega^3 + 2\omega) = 0$$

Igualando a parte imaginária a zero tem-se 3 soluções: $\omega = 0$ a polos em $\pm\sqrt{2}$. Substituindo as soluções na parte real da equação e igualando a zero, tem-se que $k_c = 0$ está associado a $s = j0$, e $k_c = 4$ está associado a $s = \pm j\sqrt{2}$.



Exemplo Extra 2²

Use as regras para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle abaixo com $G(s) = \frac{s+4}{s(s+2)(s+8)}$



Ajuste o ganho do controlador para que os polos dominantes do sistema de malha fechada tenham um fator de amortecimento $\xi = 0.7$.

Solução:

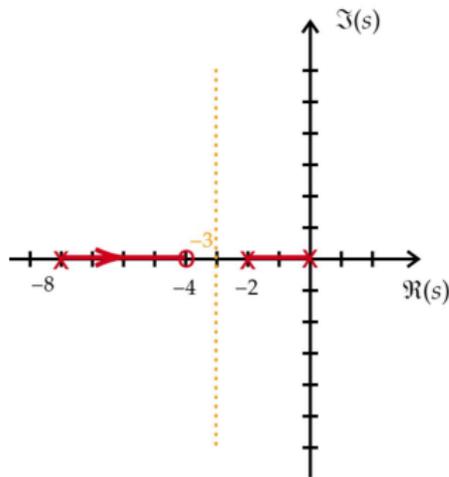
1º Passo: marcar os polos e zeros da malha aberta no diagrama.

2º Passo: marcar o lugar das raízes sobre o eixo real.

3º Passo: Assíntotas ($n - m = 3 - 1 = 2$), ponto de encontro e ângulos

$$S_c = \frac{(\sum_{i=1}^n p_i) - (\sum_{j=1}^m z_j)}{n - m} = -\frac{2}{3},$$

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ, \quad \alpha_2 = 3 \frac{180^\circ}{2} = 270^\circ.$$



²Esse exemplo foi retirado das notas de aula do Prof. Matheus Souza.

Exemplo Extra 2

Solução:

4º Passo: Como só há polos sobre o eixo real, não precisamos determinar ângulos de saída.

5º Passo: Determinar os encontros de ramos, como há 2 polos adjacentes sobre o eixo real (0 e -2):

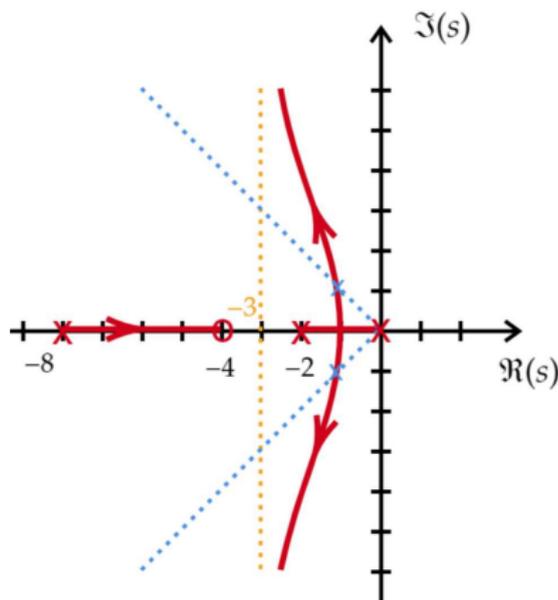
$$\dot{N}(s)D(s) - \dot{D}(s)N(s) = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 10s^2 + 16s$$

$$- (3s^2 + 20s + 16)(s + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 2s^3 + 22s^2 + 80s + 64 = 0$$

cujas raízes são $s = -4.9505 \pm j2.1475$ e $s = -1.0989$, a última pertence ao lugar das raízes sobre o eixo real.



Exemplo Extra 2

Solução:

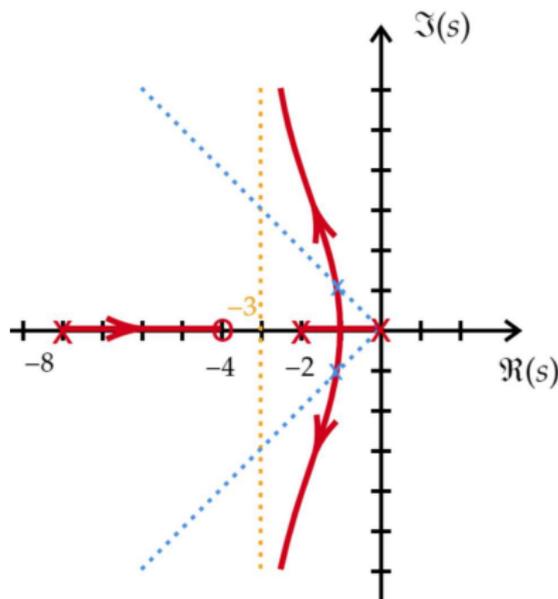
6º Passo: cruzamento com o eixo imaginário. Aplicando a eq. característica ($s^3 + 10s^2 + (16+k)s + 4k = 0$) na Tabela de Routh, tem-se que o ganho crítico é

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 16+k \\ s^2 & 10 & 4k \\ s & \frac{160+10k-4k}{10} & \\ s^0 & 4k & \end{array}$$

Não há $k > 0$ que torna a primeira coluna nula, portanto não há cruzamento com o eixo imaginário.

Projeto de k : para determinar k , marcamos os pontos de interesse ($\xi = 0.7 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.7) \approx 45^\circ$). O cruzamento com o lugar das raízes ocorre em $s_0 \approx -1 \pm j$. Pela condição de módulo, temos que

$$k = \frac{|s||s+2||s+8|}{|s+4|} \Big|_{s_0} = \frac{\sqrt{2}^2 \sqrt{50}}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{5}.$$



Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 4.**
- Franklin, G.F.; POWELL, J.D.; Emami-Naeini, A. “Feedback Control of Dynamic Systems”. Addison Wesley Pub. Company. USA, 1991.
- Notas de Aula do Prof. Matheus Souza.