

EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismo

Parte 1.3: Análise no Domínio do tempo (Estabilidade e Especificações de projeto)

Professora: Cecília de Freitas Moraes
Auxiliar didático (PED): Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br
a242988@dac.unicamp.br
página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

Introdução

- Uma das especificações usuais, empregadas na análise de sistemas de controle dinâmico, é a sua resposta temporal quando sinais particulares são aplicados a suas entradas.
- Normalmente estes são sinais simples, tais como
 - impulso,
 - degrau,
 - rampa e
 - sinal senoidal,cujas transformadas de Laplace são funções racionais.
- Nestes slides são apresentadas:
 - a definição de estabilidade de sistemas lineares e o critério de Routh (que permite determinar faixas de valores para os parâmetros da função de transferência do sistema, para que o mesmo seja estável);
 - as respostas transitórias de sistemas de primeira e segunda ordens;
 - o comportamento do erro no estado estacionário;
 - alguns índices de desempenho, consagrados na engenharia de controle como: sobressinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc.

Estabilidade de sistemas lineares

- Estabilidade é um objetivo fundamental em qualquer projeto de engenharia de sistemas.
- Sem estabilidade de alguma variável significativa pode-se afirmar que o sistema não tem utilidade prática.
- Mesmo no caso de um oscilador eletrônico para radiotransmissão que, de certo ponto de vista, pode ser classificado como instável, só encontra utilidade prática quando ocorre estabilidade da frequência e da amplitude da oscilação do sinal.
- Para sistemas lineares é sempre adotado o conceito de estabilidade BIBO (*Bounded Input Bounded Output*), que é definida impondo uma condição sobre a amplitude do sinal de saída dada uma condição sobre a amplitude do sinal de entrada.

BIBO estabilidade

Um sistema linear é BIBO estável se qualquer sinal de entrada com amplitude finita (*bounded*) produz sinal de saída com amplitude também finita (*bounded*).

- A palavra qualquer na definição anterior é fundamental e tem o objetivo de assegurar que num sistema BIBO estável nenhum sinal de entrada aplicado ao sistema pode disparar a amplitude da saída sem que haja uma excitação intencional, ou seja, uma entrada com amplitude não limitada.
- A BIBO estabilidade é, portanto, um requisito prático de segurança, de utilidade operacional do sistema.
- Para sistemas não lineares outros conceitos de estabilidade são necessários, mas sempre resultam em segurança e previsibilidade de comportamento.

Relação da Função de Transferência e BIBO estabilidade

Um sistema LTI a tempo contínuo descrito por

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_mx^{(m)}(t) + \dots + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t),$$

para $t \in \mathbb{R}_+$, pode também ser expresso (sob a hipótese de **condições iniciais nulas**) pela sua função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

pois $Y(s) = H(s)X(s)$.

Note que, se $x(t) = \delta(t)$, então $Y(s) = H(s) \cdot 1 = H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$, em que $h(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$ é a resposta ao impulso do sistema.

As raízes de

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

são chamadas **modos próprios** do sistema. Como visto anteriormente, se $D(s)$ tiver n raízes distintas: $p_1, \dots, p_n$, então

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s - p_k} \Rightarrow h(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{p_k t}, t \geq 0.$$

Logo $h(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$ se e apenas se os polos de $H(s)$ estiverem no semiplano esquerdo.

- Observe que raízes repetidas de $D(s)$ estão associadas a soluções do tipo $e^{p_k t}$, $te^{p_k t}$, $\dots$,
- Raízes imaginárias $s = \sigma \pm j\omega$ de $D(s)$ estão associadas a soluções do tipo $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ e $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$

Teorema da estabilidade linear

Teorema 3.1

Um sistema linear invariante no tempo (SLIT) é BIBO estável se e somente se todos os polos de sua função de transferência estão localizados no semi-plano esquerdo aberto do plano s , excluído o eixo imaginário, ou seja, se a parte real dos polos é negativa ($\text{Re}(s) < 0$).

Na Figura 3.1 está representada em cor cinza a “região estável” do plano s .

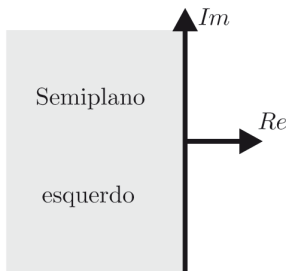


Figura 3.1 "Região estável" do plano s .

Exemplo 3.1

Considere o sistema linear da Figura 3.2.

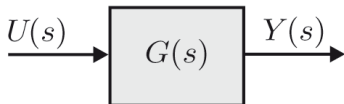


Figura 3.2 Sistema linear.

cujas função de transferência $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{a}{s + a}. \quad (1)$$

- Se $a > 0$ o sistema $G(s)$ é BIBO estável, pois o seu polo está localizado no semiplano esquerdo aberto do plano s .
- Se $a < 0$ o sistema $G(s)$ é BIBO instável, pois o seu polo está localizado no semiplano direito aberto do plano s .

Exemplo 3.1

Aplicando na entrada $U(s)$ do sistema um sinal com amplitude finita como, por exemplo, um degrau unitário, obtém-se

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a}{s(s+a)}. \quad (2)$$

Expandindo $Y(s)$ em frações parciais, obtém-se

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}. \quad (3)$$

A transformada de Laplace inversa da Equação (3) é dada por

$$y(t) = 1 - e^{-at}, \text{ para } t \geq 0. \quad (4)$$

- Se $a > 0$, a resposta (4) possui uma exponencial decrescente. O sinal com amplitude finita (degrau unitário), aplicado na entrada do sistema, produz um sinal de saída também com amplitude finita, pois para t tendendo a infinito $y(\infty) = 1$.
- Se $a < 0$, a resposta (4) possui uma exponencial crescente. O sinal com amplitude finita (degrau unitário), aplicado na entrada do sistema, produz um sinal de saída com amplitude ilimitada, pois para t tendendo a infinito $y(\infty) = \infty$.

Portanto, o sistema é BIBO estável para $a > 0$ e BIBO instável para $a < 0$.

Exemplo 3.2

Supondo que a função de transferência do sistema da Figura 3.2 seja

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad (5)$$

então o sistema $G(s)$ é BIBO instável, pois os seus polos ($s_1 = +j$ e $s_2 = -j$) estão localizados sobre o eixo imaginário do plano s .

Justificativa: aplicando-se em $G(s)$ uma entrada com amplitude finita como, por exemplo, um sinal cossenoidal $u(t) = \cos(t) \Rightarrow U(s) = s/(s^2 + 1)$, resulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}. \quad (6)$$

Da tabela de transformadas de Laplace obtém-se

$$y(t) = 0,5t\text{sen}(t), \text{ para } t \geq 0, \quad (7)$$

que é um sinal de amplitude não finita.

Logo, em sistemas com polos sobre o eixo imaginário um sinal com amplitude finita pode produzir uma saída com amplitude ilimitada. Portanto, tais sistemas são BIBO instáveis. Os casos de polos no eixo imaginário corresponde na prática aos sistemas ressonantes com perdas de energia desprezíveis como, por exemplo, as estruturas mecânicas. Como se sabe da experiência, aplicando um sinal na frequência da ressonância, por pequeno que seja, a amplitude da resposta tende a infinito.

Teste de estabilidade

Então surgem as seguintes perguntas:

- Para saber se um sistema é estável ou não temos que calcular todos seus polos e verificar se algum deles não pertence ao semiplano esquerdo do plano s , ou seja, se a parte real de algum deles não é menor que zero ($\text{Re}(s) \geq 0$)?
- Caso contrário, para saber se um sistema é estável ou não teríamos que testar todas as entradas com amplitudes limitadas para verificar se alguma delas produz uma saída cuja amplitude tende ao infinito?
- Existe uma forma mais fácil e sistemática que nos permite testar a estabilidade de um sistema a partir de sua função de transferência?
 - **Sim! Esse teste existe e é chamado de critério de Routh-Hurwitz ou apenas critério de Routh.**

Critério de estabilidade de Routh

Considere um sistema com função de transferência $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (8)$$

sendo $N(s)$ e $D(s)$ correspondentes ao numerador e ao denominador de $G(s)$, respectivamente.

O critério de Routh permite determinar quantos polos da função de transferência $G(s)$ pertencem ao semiplano direito aberto do plano s , sem precisar calcular as raízes do polinômio $D(s)$. Portanto, este critério permite determinar se o sistema $G(s)$ é ou não estável.

Para isso, primeiramente escreva o polinômio característico $D(s)$ na forma

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (9)$$

Critério de estabilidade de Routh

Condição 1:

Se no polinômio do denominador da função de transferência ($D(s)$) estiver faltando algum dos coeficientes a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), isto é, se $D(s)$ tiver algum coeficiente $a_i = 0$ ou se todos os coeficientes a_i não tiverem o mesmo sinal, então pode-se concluir imediatamente que o sistema $G(s)$ é BIBO instável. Caso contrário, deve-se verificar a condição 2.

Condição 2:

Se todos os coeficientes a_i do polinômio $D(s)$ estiverem presentes, isto é, se nenhum deles for nulo e se todos os coeficientes tiverem o mesmo sinal (todos positivos ou todos negativos), então deve-se organizar os coeficientes de acordo com a tabela de Routh (Tabela 1 mostrada no slide seguinte). O sistema $G(s)$ é BIBO estável se todos os elementos da primeira coluna de coeficientes da tabela de Routh tiverem o mesmo sinal. Caso contrário, o sistema $G(s)$ é BIBO instável. Está é uma condição necessária e suficiente para determinar se $G(s)$ é BIBO estável ou instável.

Critério de estabilidade de Routh

Tabela 1 Tabela de Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\dots$	0
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\dots$	0
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\dots$	
$\dots$	$\dots$					
s^1	f_1					
s^0	g_1					

Os coeficientes $(b_i, c_i, \dots)$ da tabela de Routh são calculados como

$$b_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad c_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1},$$

$$b_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad c_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1},$$

$$b_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}, \quad c_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1},$$

$\dots$

$\dots$

Critério de estabilidade de Routh

Critério de Routh:

O número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna de coeficientes da tabela de Routh.

- Caso algum coeficiente calculado da primeira coluna da tabela de Routh ($b_1, c_1, \dots$) seja nulo, então o sistema também é BIBO instável. Para identificar o número de raízes com parte real positiva pode-se substituir os zeros na primeira coluna por uma variável (ϵ), contar o número de trocas de sinal fazendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \text{ e } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+},$$

se o número de troca de sinais coincidir essa é a quantidade de raízes com parte real positiva. Se o número de troca de sinais for distinto, isso indica que existem raízes com parte real nula.

- Uma importante aplicação do critério de Routh é na determinação da estabilidade de um sistema quando há um ou mais parâmetros variáveis, como por exemplo, o ganho de um controlador.

Exemplo 3.3

Considere um sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^3 + 3s^2 + as + 1}. \quad (10)$$

O polinômio do denominador de $G(s)$ é dado por

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + as + 1. \quad (11)$$

- Se $a = 0$, um dos coeficientes do polinômio $D(s)$ é nulo e com isso o sistema $G(s)$ é BIBO instável;
- Se $a < 0$, um dos coeficientes do polinômio $D(s)$ tem sinal trocado e com isso o sistema $G(s)$ é BIBO instável;
- Se $a > 0$, para determinar se o sistema $G(s)$ é estável ou instável é necessário montar a tabela de Routh.

Exemplo 3.3

Tabela 2 Tabela de Routh

s^3	1	a
s^2	3	1
s^1	b_1	b_2
s^0	c_1	

Os coeficientes b_1 , b_2 e c_1 da tabela de Routh são calculados como

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{3a - 1}{3}, \quad (12)$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = 0, \quad (13)$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{b_1 \cdot 1 - 3 \cdot b_2}{b_1} = 1. \quad (14)$$

Exemplo 3.3

Todos os coeficientes da primeira coluna da tabela de Routh têm o mesmo sinal quando

$$b_1 > 0 \Rightarrow \frac{3a - 1}{3} > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3}. \quad (15)$$

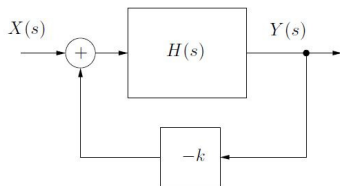
Portanto, o sistema $G(s)$ é BIBO estável se e somente se $a > \frac{1}{3}$.

Para $0 < a < \frac{1}{3}$ ocorrem duas mudanças de sinal na primeira coluna de coeficientes da tabela de Routh, isto é, uma mudança da linha s^2 para s^1 e outra mudança da linha s^1 para s^0 . Isso significa que o sistema tem dois polos no semiplano direito aberto do plano s . Portanto, nesse caso $G(s)$ é BIBO instável.

Note que, para $a = \frac{1}{3}$, o coeficiente b_1 é igual a zero e com isso todos os elementos da terceira linha da tabela são nulos. Pode-se verificar neste exemplo que $G(s)$ resulta com dois polos sobre o eixo imaginário. Logo, para $a = \frac{1}{3}$ o sistema $G(s)$ é BIBO instável.

Exercício

1. Determine o **intervalo de** $k \in \mathbb{R}$ para que o sistema realimentado representado na figura seja BIBO-estável.



$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

Sistemas de 1ª ordem

Sistemas de primeira ordem

Seja um sistema linear de primeira ordem, conforme representado na Figura 3.3.

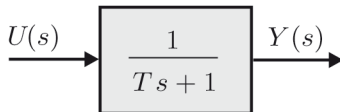


Figura 3.3 Sistema linear de primeira ordem.

A função de transferência $G(s)$ do sistema da Figura 3.3 é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad (16)$$

sendo $T > 0$ chamada de constante de tempo do sistema.

Sistemas de 1ª ordem: Resposta ao impulso

- Fisicamente o impulso é um pulso de duração muito pequena e serve para descrever uma variável física que só se altera durante um intervalo de tempo desprezível como, por exemplo, nos fenômenos de choque mecânico. Considerando que é fisicamente impossível a resposta de qualquer sistema real anteceder ao sinal que o excita, toda resposta ao impulso deve ser nula para $t < 0$. Esta é chamada condição de realizabilidade física.

Quando a entrada do sistema Figura 3.3 é um impulso unitário, isto é $u(t) = \delta(t)$, então $U(s) = 1$. Da Equação (16) tem-se que

$$G(s) = Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}. \quad (17)$$

Portanto, a resposta temporal $y(t)$ da saída do sistema é dada por

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0. \quad (18)$$

Sistemas de 1ª ordem: Resposta ao impulso

O gráfico da resposta ao impulso unitário para $T > 0$ é apresentado na Figura 3.4.

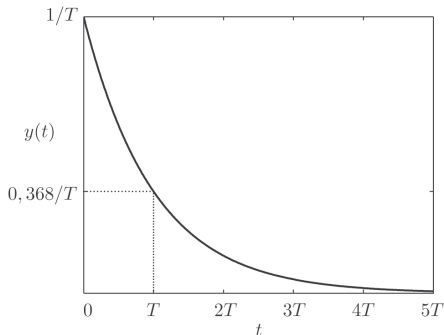


Figura 3.4 Resposta ao impulso unitário de um sistema de primeira ordem.

- Como a transformada de Laplace da resposta ao impulso $Y(s)$ é a própria função de transferência $G(s)$ do sistema, um registro experimental da resposta ao impulso permitiria estimar a constante de tempo T do sistema: T seria o tempo decorrido da aplicação do impulso até a resposta reduzir-se a 0,368 do valor inicial.
- No entanto, devido à possibilidade de ocorrência de ruídos coincidentes com o momento da medida a qualidade desta identificação é menos segura que a de outros métodos.

Sistemas de 1ª ordem: Resposta ao degrau

Quando a entrada do sistema da Figura 3.3 é um degrau de amplitude A , isto é, $u(t) = A$ para $t \geq 0$, então $U(s) = A/s$. Da Equação (16) tem-se que

$$Y(s) = \frac{A}{s(Ts + 1)} = \frac{\frac{A}{T}}{s(s + \frac{1}{T})} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s + \frac{1}{T}}, \quad (19)$$

cujas transformada inversa fornece a resposta ao degrau $y(t)$, dada por

$$y(t) = A(1 - e^{-t/T}), \text{ para } t \geq 0. \quad (20)$$

O gráfico da resposta ao degrau para $T > 0$ é apresentado na Figura 3.5.

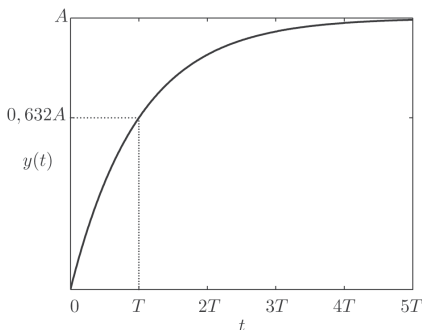


Figura 3.5 Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem.

Sistemas de 1ª ordem: Resposta ao degrau

- Uma das características importantes dessa resposta é que em $t = T$ o valor da resposta é $y(T) = 0,632A$, ou seja, a resposta $y(t)$ alcança 63,2% de sua variação final.
- Fisicamente, no instante T a principal parte da energia ou do significado da resposta já ocorreu. Por isso T é chamada de constante de tempo do sistema.
- Quanto menor for a constante de tempo, mais rápida é a resposta do sistema.

O valor final da saída quando t tende a infinito é dado por

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A. \quad (21)$$

Logo,

$$y(t) - y(\infty) = -Ae^{-t/T} = -y(\infty)e^{-t/T}. \quad (22)$$

Aplicando o logaritmo natural ao módulo dos membros da Equação (22), obtém-se

$$\ln |y(t) - y(\infty)| = \ln |-y(\infty)e^{-t/T}| = -\frac{t}{T} + \ln |y(\infty)|. \quad (23)$$

Sistemas de 1ª ordem: Resposta ao degrau

A expressão (23) ($\ln |y(t) - y(\infty)| = -\frac{t}{T} + \ln |y(\infty)|$) representa a equação de uma reta, conforme representado na Figura 3.6.

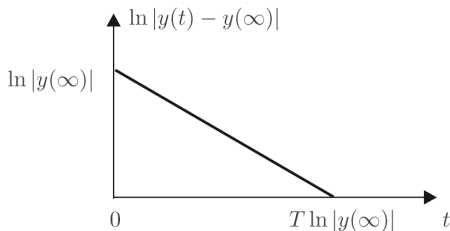


Figura 3.6 Gráfico de $\ln |y(t) - y(\infty)|$ em função de t .

Portanto, para se determinar experimentalmente se um sistema é ou não de primeira ordem e qual é a sua constante de tempo T basta desenhar o gráfico de $\ln |y(t) - y(\infty)|$ em função de t . Se a curva obtida se aproximar de uma reta, então o sistema é de primeira ordem e a inclinação da reta é igual a $-1/T$.

Sistemas de 1ª ordem: Resposta ao degrau

O tempo de subida t_r (*rise time*) de sistemas de primeira ordem é definido como o tempo para a resposta ao degrau ir de 10% a 90% do seu valor final, conforme é mostrado na Figura 3.7.

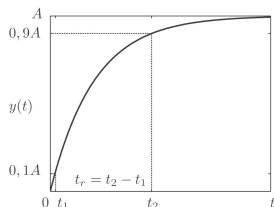


Figura 3.7 Tempo de subida t_r de um sistema de primeira ordem.

O tempo de subida t_r também serve para estimar a constante de tempo T .

Sendo t_1 e t_2 os instantes em que a resposta vale $0,1A$ e $0,9A$, respectivamente, então

$$y(t_1) = A(1 - e^{-t_1/T}) = 0,1A \quad (24)$$

$$y(t_2) = A(1 - e^{-t_2/T}) = 0,9A \quad (25)$$

ou

$$Ae^{-t_1/T} = 0,9A \quad (26)$$

$$Ae^{-t_2/T} = 0,1A. \quad (27)$$

Dividindo a Equação (26) pela Equação (27), obtém-se

$$e^{(t_2-t_1)/T} = 9. \quad (28)$$

Como $t_r = t_2 - t_1$,

$$t_r = T \ln(9). \quad (29)$$

Sistemas de 1ª ordem: Resposta à rampa

Quando a entrada do sistema da Figura 3.3 é uma rampa unitária, isto é $u(t) = t$ para $t \geq 0$, então $U(s) = 1/s^2$. Da Equação (16) tem-se que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2(Ts + 1)} = \frac{\frac{1}{T}}{s^2(s + \frac{1}{T})} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}, \end{aligned} \quad (30)$$

cujas transformada inversa é dada por

$$y(t) = t - T + Te^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0. \quad (31)$$

Para $T > 0$, o gráfico da resposta $y(t)$ para entrada rampa unitária é dado por

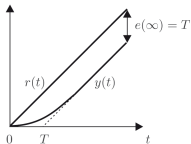


Figura 3.8 Resposta $y(t)$ para entrada rampa unitária $r(t)$.

O erro $e(t)$ entre a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ do sistema é dado por

$$\begin{aligned} e(t) &= u(t) - y(t) = t - (t - T + Te^{-t/T}) \\ &= T - Te^{-t/T}. \end{aligned} \quad (32)$$

Logo, o erro no estado estacionário vale

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T. \quad (33)$$

Portanto, quanto menor for a constante de tempo T menor será o erro $e(\infty)$ no estado estacionário e mais rápido será o transitório da saída $y(t)$.

Sistemas de 1ª ordem

Analisando-se as respostas ao impulso (18):

$$y(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0,$$

ao degrau (20):

$$y(t) = A(1 - e^{-t/T}), \text{ para } t \geq 0,$$

e à rampa (31):

$$y(t) = t - T + Te^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0$$

conclui-se que:

- a resposta ao impulso unitário é igual à derivada da resposta ao degrau unitário ($A = 1$);
- a resposta ao degrau unitário ($A = 1$) é igual à derivada da resposta à rampa unitária.

Sistemas de 2ª ordem

Sistemas de segunda ordem

Considere um sistema de segunda ordem normalizado para ganho unitário quando $s = 0$, conforme representado na Figura 3.9.

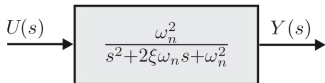


Figura 3.9 Sistema de segunda ordem.

A função de transferência $G(s)$ do sistema da Figura 3.9 é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (34)$$

O comportamento dinâmico dos sistemas de segunda ordem é determinado inteiramente pelos parâmetros ξ e ω_n . O coeficiente $\omega_n > 0$ é a frequência natural não amortecida e ξ é o coeficiente de amortecimento.

Os polos s_1 e s_2 da função de transferência (34) são

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Para que o sistema seja estável é necessário que os polos s_1 e s_2 estejam localizados no semiplano esquerdo aberto do plano s , isto é, o coeficiente de amortecimento $\xi > 0$ pode assumir os seguintes valores:

- $0 < \xi < 1$: os polos s_1 e s_2 são complexos conjugados e o sistema é dito subamortecido;
- $\xi = 1$: os polos s_1 e s_2 são reais e iguais e diz-se que o sistema tem amortecimento crítico;
- $\xi > 1$: os polos s_1 e s_2 são reais e diferentes e o sistema é superamortecido ou sobreamortecido.

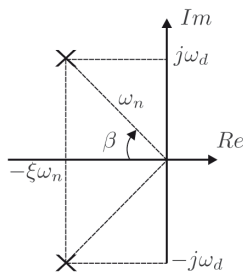
Se $\xi = 0$, o sistema não é estável e a resposta do sistema é oscilatória, isto é, sem amortecimento.

Sistema subamortecido: $0 < \xi < 1$

Para $0 < \xi < 1$ os polos do sistema são complexos conjugados, ou seja,

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d, \quad (36)$$

sendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} > 0$ chamada de frequência natural amortecida. Os polos do sistema estão representados na Figura 3.10.



Nota-se na Figura 3.10 que o coeficiente de amortecimento ξ é dado por

$$\xi = \cos(\beta). \quad (37)$$

Figura 3.10 Polos complexos conjugados.

Resposta ao degrau - Sistema subamortecido: $0 < \xi < 1$

Quando a entrada do sistema da Figura 3.9 é um degrau unitário, isto é, $U(s) = 1/s$, tem-se da Equação (34) que

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (38)$$

Expandindo $Y(s)$, obtém-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (39)$$

Resposta ao degrau - Sistema subamortecido: $0 < \xi < 1$

Da tabela de transformadas de Laplace obtém-se a resposta do sistema

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t), \text{ para } t \geq 0, \quad (40)$$

ou

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta), \text{ para } t \geq 0. \quad (41)$$

Na Figura 3.11 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau para $\xi = 0,3$.

Analisando-se o gráfico da Figura 3.11 pode-se perceber que a resposta $y(t)$ é uma oscilação amortecida com frequência ω_d e as envoltórias da oscilação são exponenciais com constante de tempo $T = 1/\xi\omega_n$.

Nota-se também que o valor estacionário da saída é $y(\infty) = 1$, ou seja, a saída tende a seguir a entrada $u(t)$.

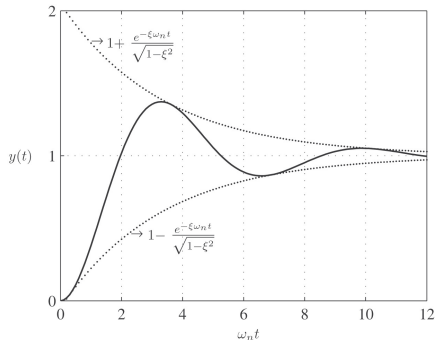


Figura 3.11 Resposta ao degrau para $\xi = 0,3$.

Resposta ao degrau - Sistema oscilatório: $\xi = 0$

Quando o coeficiente de amortecimento é nulo, os polos do sistema (34) são complexos conjugados ($s_1 = j\omega_n$, $s_2 = -j\omega_n$) e estão localizados sobre o eixo imaginário, conforme representado na Figura 3.12.

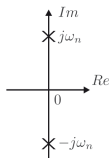


Figura 3.12 Polos complexos conjugados sobre o eixo imaginário.

Fazendo $\xi = 0$ na Equação (38), a transformada de Laplace da saída $Y(s)$ resulta

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \quad (42)$$

Logo,

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t) \text{ para } t \geq 0. \quad (43)$$

O gráfico da resposta ao degrau é apresentado na Figura 3.13.

Analisando-se este gráfico pode-se perceber que a resposta $y(t)$ não tem amortecimento, ou seja, é uma oscilação senoidal com frequência natural ω_n .

Daí a denominação de ω_n ser chamada de frequência natural não amortecida. Nesse caso pode-se dizer que o transitório não decai ou que só existe resposta permanente.

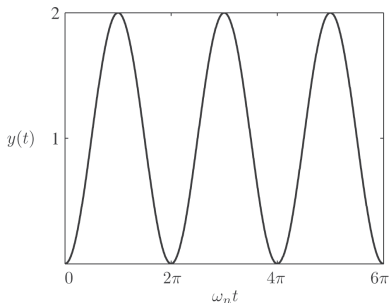


Figura 3.13 Resposta ao degrau para $\xi = 0$.

Resposta ao degrau - Sistema criticamente amortecido: $\xi = 1$

Quando $\xi = 1$, (34) resulta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}. \quad (44)$$

Nesse caso há 2 polos reais negativos e iguais a $-\omega_n$, conforme Figura 3.14.

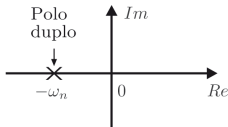


Figura 3.14 Polo duplo em $-\omega_n$.

Fazendo $U(s) = \frac{1}{s}$ na Equação (44), obtém-se

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}.$$

Logo,

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0. \quad (45)$$

Na Figura 3.15 é apresentado o gráfico da resposta ao degrau para $\xi = 1$.

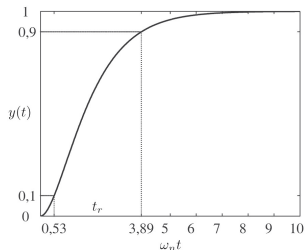


Figura 3.15 Resposta ao degrau para $\xi = 1$.

Analisando-se o gráfico da Figura 3.15 pode-se perceber que o valor estacionário da saída é $y(\infty) = 1$, ou seja, a saída tende a seguir a entrada $u(t)$. O tempo de subida de 10% a 90% do valor final pode ser calculado numericamente e vale, aproximadamente,

$$t_r \approx \frac{3,89 - 0,53}{\omega_n} \approx \frac{3,36}{\omega_n}. \quad (46)$$

Resposta ao degrau - Sistema com super amortecido: $\xi > 1$

Para $\xi > 1$ os polos do sistema são reais e diferentes, ou seja:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Os polos estão representados na Figura 3.16.

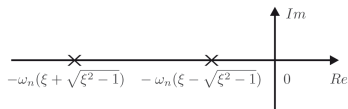


Figura 3.16 Polos reais e diferentes.

Quando a entrada do sistema da Figura 3.9 é um degrau unitário, isto é, $U(s) = 1/s$, tem-se da Equação (34) que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{2s_1\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{(s - s_1)} \\ &\quad + \frac{\omega_n}{2s_2\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{(s - s_2)} \quad (47) \end{aligned}$$

Logo, para $t \geq 0$

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2s_1\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{s_1 t} + \frac{\omega_n}{2s_2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{s_2 t}. \quad (48)$$

Na Figura 3.17 é apresentada uma comparação entre os gráficos da resposta ao degrau para $\xi = 2$ e $\xi = 1$.

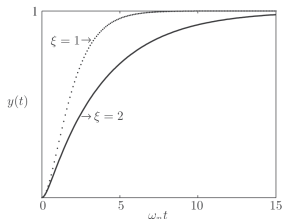


Figura 3.17 Resposta ao degrau para $\xi = 2$ e $\xi = 1$.

Analisando-se os gráficos da Figura 3.17 pode-se perceber que a resposta ao degrau de um sistema superamortecido ($\xi > 1$) é mais lenta que a resposta de um sistema com amortecimento crítico ($\xi = 1$).

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem

Na Figura 3.18 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau de $y(t)$ em função de $\omega_n t$ para diversos valores do coeficiente de amortecimento ξ . Conforme se pode perceber, as respostas dos sistemas subamortecidos ($\xi < 1$) cruzam o valor final mais rapidamente que as respostas dos sistemas com amortecimento crítico ($\xi = 1$) e superamortecidos ($\xi > 1$).

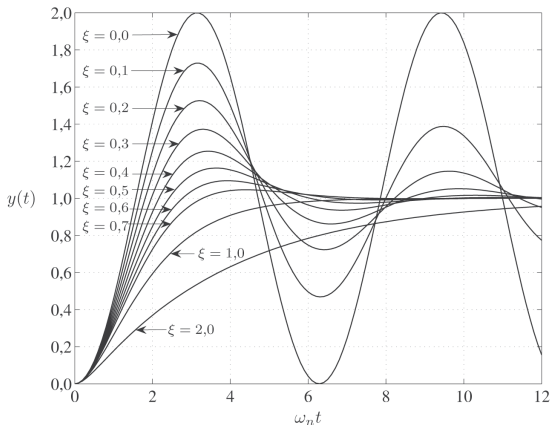


Figura 3.18 Gráficos de $y(t)$ em função de $\omega_n t$.

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem

Na Figura 3.19 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau de $y(t)$ em função do coeficiente de amortecimento ξ e de $\omega_n t$.

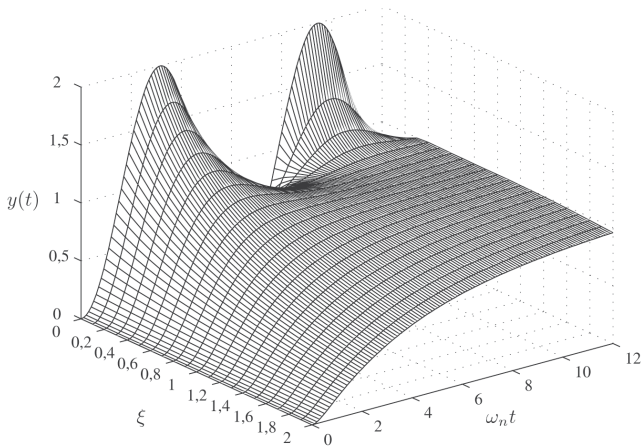


Figura 3.19 Gráficos de $y(t)$ em função de ξ e $\omega_n t$.

Características das respostas transitórias

Características das respostas transitórias

- Em muitos casos as características de desempenho desejadas nos sistemas, especialmente nos sistemas de controle a realimentação, são resumidas em termos de alguns poucos indicadores que são medidos nas respostas.
- Esses indicadores são empregados como especificações de projeto de sistemas de controle, e só têm sentido no caso de **sistemas estáveis**.
- As respostas ao degrau têm importância porque na prática podem ser facilmente medidas, bastando para isso modificar o patamar das entradas e registrar as saídas.
- É bom lembrar que as respostas transitórias dependem das condições iniciais e podem ser perturbadas por ruídos, que são comuns nos ambientes industriais. Por isso costuma-se repetir as medidas buscando partir de uma condição inicial padrão (de preferência o repouso, isto é, a saída e todas as suas derivadas nulas) e depois estimar a média das medidas.

Características das respostas transitórias

Na Figura 3.20 estão indicados os principais parâmetros utilizados na engenharia como medidas de desempenho de sistemas subamortecidos. Esses parâmetros e seus nomes internacionais são os seguintes:

- t_d : tempo de atraso (*delay time*);
- t_r : tempo de subida (*rise time*);
- t_p : tempo de pico (*peak time*);
- t_s : tempo de acomodação (*settling time*);
- M_p : sobressinal máximo (*overshoot* ou *maximum peak*).

No caso de sistemas com amortecimento crítico e sistemas superamortecidos apenas o tempo de atraso e o tempo de subida são considerados como medidas de desempenho, pois nestes sistemas não há sobressinal. Para sistemas de ordem elevada esses parâmetros também podem ser adotados.

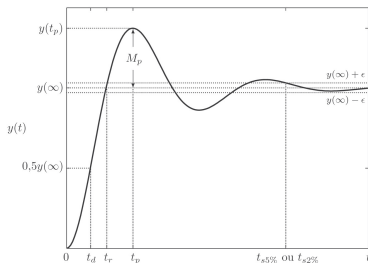


Figura 3.20 Parâmetros para medidas de desempenho de sistemas subamortecidos.

Tempo de atraso t_d

O tempo de atraso t_d é o tempo necessário para a resposta ao degrau alcançar pela primeira vez a metade do valor final, isto é, $0,5y(\infty)$.

Tempo de subida t_r

- Para sistemas com amortecimento crítico ou sistemas superamortecidos o tempo de subida t_r normalmente é definido como o tempo necessário para a resposta ao degrau ir de 10% a 90% do seu valor.
- Para sistemas subamortecido define-se o tempo de subida t_r como o primeiro instante em que a resposta ao degrau alcança 100% do seu valor final.
- Da resposta ao degrau (41) para sistemas subamortecidos de segunda ordem tem-se que

$$y(t_r) = 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_r} \text{sen}(\omega_d t_r + \beta), \quad (49)$$

ou seja,

$$\text{sen}(\omega_d t_r + \beta) = 0, \quad (50)$$

com

$$\omega_d t_r + \beta = \pi. \quad (51)$$

Portanto,

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (52)$$

Tempo de pico t_p

O tempo de pico t_p é o tempo necessário para a resposta ao degrau alcançar o primeiro pico de sobressinal, que somente ocorre em sistemas subamortecidos. No instante de pico a derivada da resposta ao degrau é nula. Para sistemas de segunda ordem tem-se da Equação (41) que

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0 = \frac{e^{-\xi\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\xi\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) - \omega_d \cos(\omega_d t_p + \beta)) \quad (53)$$

ou

$$\xi\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) - \omega_d \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0. \quad (54)$$

Da Figura 3.10, $\omega_d = \omega_n \sin(\beta)$ e $\xi = \cos(\beta)$:

$$\begin{aligned} \omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) \cos(\beta) \\ - \omega_n \cos(\omega_d t_p + \beta) \sin(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

como $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$:

$$\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta - \beta) = 0. \quad (56)$$

Logo,

$$\sin(\omega_d t_p) = 0; \quad (57)$$

Portanto, o primeiro pico ocorre em $\omega_d t_p = \pi$,
ou seja,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}. \quad (58)$$

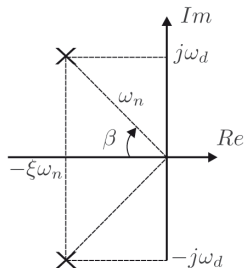


Figura 3.10 Polos complexos conjugados.

Sobressinal máximo: M_p

O sobressinal máximo é definido como a diferença percentual entre o pico e o valor final da resposta ao degrau

$$M_p(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100\%. \quad (59)$$

Para sistemas de segunda ordem subamortecidos tem-se da Equação (41) que

$$y(t_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \quad (60)$$

e

$$y(\infty) = 1. \quad (61)$$

Logo,

$$M_p = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta). \quad (62)$$

Como $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$,

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n \pi / \omega_d} \sin(\beta). \quad (63)$$

Da Figura 3.10 tem-se que $\sin(\beta) = \omega_d / \omega_n$ e $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$. Portanto,

$$M_p(\%) = e^{-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}} 100\%. \quad (64)$$

Note que o sobressinal é função exclusiva do coeficiente de amortecimento ξ . A Figura 3.21 é muito útil para estimar ξ a partir da medida do sobressinal M_p .

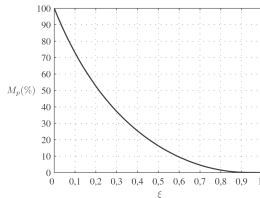


Figura 3.21 Sobressinal $M_p(\%)$ em função de ξ .

Tempo de acomodação: t_s

O tempo de acomodação é o tempo necessário para que a resposta ao degrau passe a permanecer dentro de uma faixa de tolerância de $\pm\epsilon$ em torno do valor final ($\pm 5\%$ ou $\pm 2\%$ de $y(\infty)$, ver Figura 3.20).

Para o sistema de segunda ordem subamortecido da Figura 3.11 a constante de tempo das envoltórias é $T = 1/\xi\omega_n$.

Assim, o tempo de acomodação t_s , para o qual os valores da resposta permanecem dentro de uma faixa de $\pm 5\%$ em torno do valor final, ocorre em:

$$e^{-\xi\omega_n t_s} < 0,05 \Rightarrow \xi\omega_n t_s \cong 3 \quad (65)$$

ou

$$t_s \cong \frac{3}{\xi\omega_n}. \quad (66)$$

Analogamente, para uma faixa de $\pm 2\%$ em torno do valor final tem-se que

$$e^{-\xi\omega_n t_s} < 0,02 \Rightarrow \xi\omega_n t_s \cong 4 \quad (67)$$

ou

$$t_s \cong \frac{4}{\xi\omega_n}. \quad (68)$$

- Portanto, utilizando o critério de 5%, o tempo de acomodação $t_s = 3T$, já pelo critério de 2%, $t_s = 4T$.
- Note que, dado o coeficiente de amortecimento ξ , o tempo de acomodação (t_s) é inversamente proporcional à frequência natural não amortecida ω_n do sistema. Como o valor de ξ é normalmente determinado pelo sobressinal máximo M_p requerido ou permitido, o tempo de acomodação é determinado pela frequência natural não amortecida ω_n .
- Na prática da engenharia normalmente deseja-se atender a duas exigências conflitantes: resposta transitória rápida e resposta bem amortecida, isto é, sem sobressinal.

Exercício

1. Aplicando-se um degrau unitário na entrada $r(t)$ do

sistema da Figura 3.30, calcule:

- o tempo de subida,
- o tempo de pico,
- o sobressinal máximo e
- o tempo de acomodação pelos critérios de 5% e 2%.

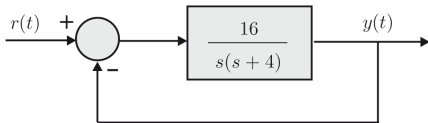


Figura 3.30 Sistema de segunda ordem.

Sistemas com mais de dois polos

Sistemas com mais de dois polos

Considere um sistema de terceira ordem subamortecido ($0 < \xi < 1$) com dois polos complexos conjugados em $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ e com um terceiro polo no eixo real em $s_3 = -p < 0$. Suponha que a função de transferência deste sistema seja dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s + p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (69)$$

Aplicando-se um degrau unitário na entrada $U(s)$, obtém-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2 p}{s(s + p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{as + b}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{c}{s + p}, \end{aligned} \quad (70)$$

com

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\xi\omega_n p - p^2}{p^2 + \omega_n^2 - 2\xi\omega_n p}, \\ b &= \frac{4\xi^2\omega_n^2 p - 2\xi\omega_n p^2 - \omega_n^2 p}{p^2 + \omega_n^2 - 2\xi\omega_n p}, \\ c &= -\frac{\omega_n^2}{p^2 + \omega_n^2 - 2\xi\omega_n p} \end{aligned}$$

A Equação (70) também pode ser escrita como

$$Y(s) = \frac{1}{s} + a \frac{s + \xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\frac{b - a\xi\omega_n}{\omega_d} \right) \frac{\omega_d}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{c}{s + p} \\ &= \frac{1}{s} + a \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (72)$$

$$+ \left(\frac{b - a\xi\omega_n}{\omega_d} \right) \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{c}{s + p} \quad (73)$$

No domínio do tempo tem-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + ce^{-pt} \\ &+ e^{-\xi\omega_n t} \left(a \cos(\omega_d t) + \left(\frac{b - a\xi\omega_n}{\omega_d} \right) \text{sen}(\omega_d t) \right), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Sistemas com mais de dois polos

- Analisando a Equação (74) verifica-se que quando o polo real em $s = -p$ está bem mais à esquerda dos polos complexos conjugados no plano s , isto é, para $p \gg \xi\omega_n$, a exponencial devida ao polo real tenderá a zero muito mais rapidamente que a exponencial devida aos polos complexos.
- Desse modo o polo real em $s = -p$ terá pouca influência na resposta, e a mesma será devida quase exclusivamente aos polos complexos conjugados, que são chamados de polos dominantes.
- Logo, para $p \gg \xi\omega_n$, as respostas dos sistemas de terceira ordem são próximas das respostas dos sistemas de segunda ordem subamortecidos ($0 < \xi < 1$).
- Nesse caso, as fórmulas do sobressinal, tempo de subida, tempo de pico, tempo de acomodação, etc., deduzidas para os sistemas de segunda ordem, também podem ser empregadas para os polos dominantes de um sistema de terceira ordem.

- De fato, quando o polo real em $s = -p$ está bem mais à esquerda dos polos complexos, isto é, para p tendendo a infinito, tem-se que $a = -1$, $b = -2\xi\omega_n$ e $c = 0$. Com isso, a saída $Y(s)$ resulta

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad (75) \end{aligned}$$

que corresponde à saída de um sistema de segunda ordem com entrada degrau unitário.

- Porém, se o polo real em $s = -p$ estiver perto dos polos complexos este também afetará a resposta do sistema. Nesse caso o comportamento do sistema de terceira ordem não será o próximo do sistema de segunda ordem.
- Na prática, os comportamentos dos sistemas de segunda e terceira ordens são aceitos como próximos quando o polo real estiver localizado pelo menos cinco constantes de tempo mais à esquerda dos polos complexos conjugados dominantes, isto é, para $p \geq 5\xi\omega_n$.
- A análise efetuada aqui para sistemas de terceira ordem também pode ser estendida para sistemas com mais de três polos sem a existência de zeros.

Exemplo 3.4

Considere os sistemas com as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{25}{s^2 + 2,8s + 25},$$

$$G_3(s) = \frac{175}{(s + 7)(s^2 + 2,8s + 25)},$$

$$G_2(s) = \frac{75}{(s + 3)(s^2 + 2,8s + 25)},$$

$$G_4(s) = \frac{500}{(s + 20)(s^2 + 2,8s + 25)}.$$

- O sistema $G_1(s)$ é de segunda ordem, com coeficiente de amortecimento $\xi = 0,28$ e frequência natural $\omega_n = 5$. Logo, a parte real dos polos complexos conjugados é $-\xi\omega_n = -1,4$.
- Os sistemas $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ são de terceira ordem com polo real em $s = -3$, $s = -7$ e $s = -20$, respectivamente.

Aplicando um degrau unitário na entrada de cada um desses sistemas e calculando a transformada inversa, obtém-se a resposta temporal. A resposta $y_1(t)$ é dada pela Equação (40), e as respostas $y_2(t)$, $y_3(t)$ e $y_4(t)$ podem ser calculadas por (74):

$$y_1(t) = 1 - e^{-1,4t} [\cos(4,8t) + 0,2917\sin(4,8t)]; \quad (76)$$

$$y_2(t) = 1 - e^{-1,4t} [0,0234 \cos(4,8t) + 0,6172\sin(4,8t)] - 0,9766e^{-3t}; \quad (77)$$

$$y_3(t) = 1 - e^{-1,4t} [0,5404 \cos(4,8t) + 0,8278\sin(4,8t)] - 0,4596e^{-7t}; \quad (78)$$

$$y_4(t) = 1 - e^{-1,4t} [0,9322 \cos(4,8t) + 0,5542\sin(4,8t)] - 0,0678e^{-20t}. \quad (79)$$

Note que a resposta $y_4(t)$ é a que está mais próxima da resposta $y_1(t)$ do sistema de segunda ordem, pois o sistema $G_4(s)$ possui um polo real em $s = -20$, que é o mais distante dos polos complexos conjugados dominantes

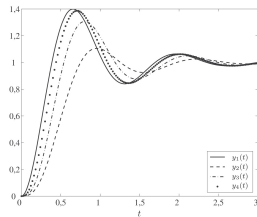


Figura 3.22 Respostas ao degrau unitário dos sistemas $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$.

Sistemas com zeros

Sistemas com zeros

Considere um sistema de segunda ordem subamortecido ($0 < \xi < 1$) com dois polos complexos conjugados e um zero no eixo real em $s = -1/T$. Suponha que a função de transferência deste sistema seja dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2(Ts + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (80)$$

Aplicando-se um degrau unitário na entrada $U(s)$, obtém-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2(Ts + 1)}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n - \omega_n^2 T}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \end{aligned} \quad (81)$$

A Equação (81) também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ &\quad - \left(\frac{\xi\omega_n - \omega_n^2 T}{\omega_d} \right) \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}. \end{aligned} \quad (82)$$

No domínio do tempo tem-se que (para $t \geq 0$)

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\xi\omega_n - \omega_n^2 T}{\omega_d} \right) \text{sen}(\omega_d t) \right), \quad (83)$$

Analisando a Equação (83) verifica-se que quando a constante T é “pequena”, ou seja, quando o zero real em $s = -1/T$ está distante dos polos complexos conjugados no plano s , tem-se que $\xi\omega_n - \omega_n^2 T \approx \xi\omega_n$.

Neste caso a resposta transitória é a mesma que foi calculada para sistemas de segunda ordem subamortecido (Equação (40)), ou seja, o zero terá pouca influência na resposta. Porém, quanto mais próximo o zero estiver dos polos complexos dominantes maior será o seu efeito sobre a resposta transitória.

Exemplo 3.5

Considere os sistemas com as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{25}{s^2 + 2,8s + 25},$$

$$G_3(s) = \frac{25(0,05s + 1)}{s^2 + 2,8s + 25},$$

$$G_2(s) = \frac{25(0,5s + 1)}{s^2 + 2,8s + 25},$$

$$G_4(s) = \frac{25(-0,5s + 1)}{s^2 + 2,8s + 25}.$$

- O sistema $G_1(s)$ é de segunda ordem, com coeficiente de amortecimento $\xi = 0,28$ e frequência natural $\omega_n = 5$, de modo que a parte real dos polos complexos conjugados é $-\xi\omega_n = -1,4$.
- Os sistemas $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ possuem um zero real em $s = -2$, $s = -20$ e $s = +2$, respectivamente.

Aplicando um degrau unitário na entrada de cada um desses sistemas e calculando a transformada inversa obtêm-se as respostas temporais

$$y_1(t) = 1 - e^{-1,4t}[\cos(4,8t) + 0,2917\sin(4,8t)]; \quad (84)$$

$$y_2(t) = 1 - e^{-1,4t}[\cos(4,8t) - 2,3125\sin(4,8t)]; \quad (85)$$

$$y_3(t) = 1 - e^{-1,4t}[\cos(4,8t) + 0,0313\sin(4,8t)]; \quad (86)$$

$$y_4(t) = 1 - e^{-1,4t}[\cos(4,8t) + 2,8958\sin(4,8t)]; \quad (87)$$

Os gráficos de $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ e $y_4(t)$ são apresentados na Figura 3.23. Note que a resposta $y_3(t)$ é a que está mais próxima da resposta $y_1(t)$ do sistema de segunda ordem, pois $G_3(s)$ possui um zero real em $s = -20$, que é o mais distante dos polos complexos conjugados dominantes.

Um resultado interessante pode ser observado quando o zero está localizado no semiplano direito do plano s , que é o caso do sistema $G_4(s)$, cujo zero se localiza em $s = +2$. Neste caso a saída $y_4(t)$ se direciona nos instantes iniciais em sentido contrário ao seu valor estacionário. Os sistemas que apresentam tal característica são chamados de sistemas de fase não mínima.

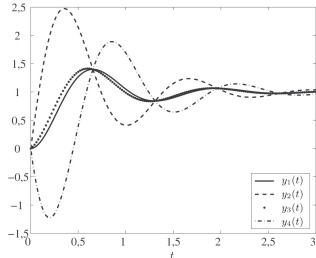


Figura 3.23 Respostas ao degrau unitário dos sistemas $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$.

Sistemas com atraso puro ou atraso por transporte

Sistemas com atraso puro ou atraso por transporte

- 1 O atraso puro ou atraso por transporte (*time delay*) é um fenômeno muito frequente em sistemas com escoamento de fluidos. Tempo morto e retardo velocidade-distância também constituem sinônimos usuais.
- 2 Considere, por exemplo, o sistema da Figura 3.24, no qual um líquido escoar a uma vazão volumétrica q constante através de um tubo isolado com secção reta uniforme de área A e comprimento L . A densidade e a capacidade calorífica do líquido são constantes e a parede do tubo é um isolante térmico.
- 3 No estado inicial o sistema está em regime estacionário e a temperatura de entrada é igual à temperatura de saída, ou seja, $\theta_e(0) = \theta_s(0)$.
- 4 Deseja-se obter a função de transferência que relaciona a temperatura de entrada $\theta_e(t)$ com a temperatura de saída $\theta_s(t)$ do fluido. Dadas as hipóteses enunciadas, especialmente a de não haver perdas de calor para as paredes do tubo, uma perturbação de temperatura na entrada é percebida sem atenuação na saída depois de α segundos, que é o tempo necessário para as partículas do fluido percorrerem o tubo.

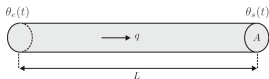


Figura 3.24 Escoamento de um líquido numa tubulação.

Esse tempo é dado por

$$\alpha = \frac{LA}{q}. \quad (88)$$

Na Figura 3.25 são apresentadas as respostas temporais da temperatura de entrada $\theta_e(t)$ e saída $\theta_s(t)$. Note que o fenômeno independe de como a temperatura $\theta_e(t)$ evolui.

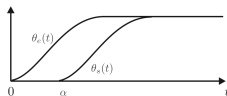


Figura 3.25 Respostas temporais das temperaturas de entrada e saída numa tubulação.

Pelo gráfico da Figura 3.25 percebe-se que a temperatura de saída possui um atraso de tempo α com relação à temperatura de entrada, ou seja,

$$\theta_s(t) = \theta_e(t - \alpha). \quad (89)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace e a propriedade de translação no tempo na Equação (89), obtém-se

$$\Theta_s(s) = e^{-\alpha s} \Theta_e(s). \quad (90)$$

Portanto, a função de transferência de um atraso puro ou retardo é dada por

$$G(s) = \frac{\Theta_s(s)}{\Theta_e(s)} = e^{-\alpha s}. \quad (91)$$

Resposta dos sistemas de controle por realimentação

Resposta dos sistemas de controle por realimentação

Num sistema de controle por realimentação, além do sinal de referência $R(s)$ é importante considerar o sinal de perturbação $P(s)$, conforme representado na Figura 3.26.

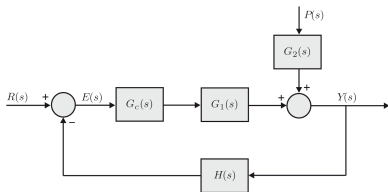


Figura 3.26 Diagrama de blocos de um sistema com realimentação.

Na Figura 3.26 estão representadas as seguintes variáveis:

- $G_c(s)$: controlador;
- $G_1(s)$ e $G_2(s)$: plantas ou processos controlados;
- $H(s)$: transdutor de medida;
- $R(s)$: referência;
- $Y(s)$: saída controlada;
- $P(s)$: perturbação;
- $E(s)$: erro entre a referência e a saída do transdutor de medida.

Do sistema da Figura 3.26 tem-se que

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s), \quad (92)$$

$$Y(s) = G_c(s)G_1(s)E(s) + G_2(s)P(s). \quad (93)$$

Substituindo (92) em (93) e rearranjando os termos, obtém-se uma importante expressão geral para a transformada de Laplace da variável controlada $Y(s)$, dada por

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G_1(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)H(s)} P(s). \quad (94)$$

No diagrama em blocos da Figura 3.26 a função de transferência de malha aberta $G_{ma}(s)$ é definida como a função de transferência que se encontra em cascata, ao percorrer a malha de realimentação, excetuando-se o somador, ou seja,

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G_1(s)H(s). \quad (95)$$

Note que na expressão (94) a variável $Y(s)$ tem duas parcelas:

- A primeira é igual ao sinal $R(s)$ multiplicado por uma fração cujo numerador é o produto das funções de transferência encontradas pelo sinal, quando este percorre a malha de $R(s)$ até $Y(s)$, e cujo denominador é a unidade mais a função de transferência de malha aberta.
- A segunda parcela é igual ao sinal $P(s)$ multiplicado por uma fração cujo numerador é a função de transferência encontrada pelo sinal, quando este percorre a malha de $P(s)$ até $Y(s)$, e cujo denominador é igual ao da primeira parcela.

A transformada de Laplace inversa da expressão (94) permite obter a resposta do sistema quando determinados sinais são aplicados nas entradas de referência e de perturbação.

Erro estacionário ou permanente

Erro estacionário ou permanente

- Em um sistema de controle dinâmico também é muito comum e operacionalmente significativa a especificação de seu desempenho por meio do erro estacionário ou erro em regime permanente, quando estão presentes certos tipos de sinal de referência ou de perturbação pela carga.
- Quando o sinal de entrada é o degrau e o erro atuante é expresso como uma fração em porcentagem da amplitude do degrau, então o erro estacionário é denominado astatismo.
- Substituindo a Equação (93) na Equação (92) e rearranjando os termos, obtém-se uma expressão para a transformada de Laplace do erro $E(s)$ dada por

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_1(s)H(s)}R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)H(s)}P(s). \quad (96)$$

A expressão (96) também pode ser escrita em termos da função de transferência de malha aberta (95), ou seja,

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_{ma}(s)}R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_{ma}(s)}P(s). \quad (97)$$

- A seguir são obtidas expressões para o erro estacionário, quando sinais de referência e de perturbação são aplicados na entrada do sistema.
- Os tipos de sinais de referência e de perturbação mais importantes são o degrau e a rampa.

É importante ressaltar que o sinal $E(s)$ representa o erro entre o sinal de referência $R(s)$ e a saída controlada $Y(s)$ apenas quando a realimentação é unitária, ou seja, $H(s) = 1$.

Degrau na referência e perturbação nula

Se o sistema for estável, isto é, se os polos de malha fechada estiverem localizados no semiplano esquerdo aberto do plano s , então o erro estacionário $e(\infty)$ pode ser calculado por meio do teorema do valor final.

Supondo que um de grau de amplitude A é aplicado na referência ($R(s) = A/s$) e que a perturbação é nula, então, aplicando o teorema do valor final na expressão (97), obtém-se

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{A}{s} \quad (98) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + G_{ma}(s)}. \end{aligned}$$

Genericamente, a função de transferência de malha aberta $G_{ma}(s)$ pode ser escrita como

$$G_{ma}(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^L (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}, \quad (99)$$

sendo K um ganho, τ_i ($i = 1, \dots, m$) e T_j ($j = 1, \dots, n$) constantes de tempo e L indica a quantidade de integradores ou polos na origem de $G_{ma}(s)$.

Usualmente um sistema é chamado de tipo $(0, 1, 2, \dots)$ de acordo com a sua quantidade ($L = 0, 1, 2, \dots$) de polos na origem.

Substituindo (99) em (98), obtém-se

$$e(\infty) = \begin{cases} \frac{A}{1 + K} & \text{se } L = 0, \\ 0 & \text{se } L \geq 1. \end{cases} \quad (100)$$

Rampa na referência e perturbação nula

Supondo que uma rampa $r(t) = At$ é aplicada na referência ($R(s) = A/s^2$) e que a perturbação é nula, então, pelo teorema do valor final, tem-se que

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{A}{s^2} \quad (101) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s(1 + G_{ma}(s))}. \end{aligned}$$

Da expressão (99) tem-se que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s \left(\frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^L (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \right)} \quad (102)$$

Portanto,

$$e(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } L = 0, \\ \frac{A}{K} & \text{se } L = 1, \\ 0 & \text{se } L \geq 2. \end{cases} \quad (103)$$

Na Tabela 3.3 estão resumidos os erros estacionários para sistemas tipo 0, 1 e 2 ($L = 0, 1$ e 2) para degrau e rampa na referência com perturbação nula.

Tabela 3.3 Erros estacionários para sistemas tipo 0, 1 e 2 com perturbação nula

Sistema tipo L	Degrau	Rampa
0	$\frac{A}{1+K}$	∞
1	0	$\frac{A}{K}$
2	0	0

Perturbação em degrau e referência nula

Supondo que a perturbação $P(s)$ é um degrau de amplitude A e que a referência é nula, então, aplicando o teorema do valor final na expressão (97), obtém-se

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{A}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-AG_2(s)H(s)}{1 + G_{ma}(s)} \end{aligned} \quad (104)$$

A função de transferência $G_2(s)H(s)$ pode ser escrita, genericamente, como

$$G_2(s)H(s) = \frac{K_p(\alpha_1s + 1)(\alpha_2s + 1) \cdots (\alpha_ps + 1)}{s^M(\beta_1s + 1)(\beta_2s + 1) \cdots (\beta_qs + 1)}, \quad (105)$$

sendo K_p um ganho, α_i ($i = 1, \dots, p$) e β_j ($j = 1, \dots, q$) constantes de tempo e $M \geq L$ indica a quantidade de integradores ou polos na origem de $G_2(s)H(s)$.

Substituindo (99) e (105) em (104), obtém-se

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{-AK_p(\alpha_1s+1)(\alpha_2s+1)\cdots(\alpha_ps+1)}{s^M(\beta_1s+1)(\beta_2s+1)\cdots(\beta_qs+1)}}{1 + \frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^L(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{AK_p}{s^M}}{1 + \frac{K}{s^L}}. \end{aligned} \quad (106)$$

Portanto,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-AK_p s^{L-M}}{s^L + K}. \quad (107)$$

Na Tabela 3.4 são apresentados alguns erros estacionários para perturbação em degrau e referência nula.

Tabela 3.4 Erros estacionários para perturbação em degrau e referência nula

L	M	$e(\infty)$
0	0	$-\frac{AK_p}{1+K}$
1	0	0
1	1	$-\frac{AK_p}{K}$
2	0	0
2	1	0
2	2	$-\frac{AK_p}{K}$

Perturbação em rampa e referência nula

Supondo que a perturbação é uma rampa ($p(t) = At \Rightarrow P(s) = A/s^2$) e que a referência é nula, então, aplicando o teorema do valor final na expressão (97), obtém-se

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{A}{s^2} \quad (108) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-AG_2(s)H(s)}{s(1 + G_{ma}(s))}. \end{aligned}$$

Substituindo (99) e (105) em (108), obtém-se

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{AK_p(\alpha_1 s + 1)(\alpha_2 s + 1) \cdots (\alpha_p s + 1)}{s^M(\beta_1 s + 1)(\beta_2 s + 1) \cdots (\beta_q s + 1)}}{s \left(\frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^L(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \right)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{AK_p}{s^M}}{s \left(1 + \frac{K}{s^L} \right)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{AK_p}{s^M}}{s \left(\frac{s^L + K}{s^L} \right)}. \quad (109) \end{aligned}$$

Portanto,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-AK_p s^{L-M-1}}{s^L + K}. \quad (110)$$

Na Tabela 3.5 são apresentados alguns erros estacionários para perturbação em rampa e referência nula.

Tabela 3.5 Erros estacionários para perturbação em rampa e referência nula

L	M	$e(\infty)$
0	0	$-\frac{AK_p}{K}$
1	0	0
1	1	∞
2	0	0
2	1	$-\frac{AK_p}{K}$
2	2	∞

Resposta ao impulso, degrau e rampa de um sistema estável

Suponha que

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

é a função de transferência de malha-fechada de um sistema estável (todos polos com parte real negativa). Então, a resposta em regime para as entradas impulso, degrau e rampa é respectivamente dada por:

Impulso:

$$Y(s) = H(s) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = 0$$

Degrau:

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s} = \frac{a}{s} + \frac{N_1(s)}{D(s)} \Rightarrow y(t) = a + \text{transitório}, \quad a = H(0)$$

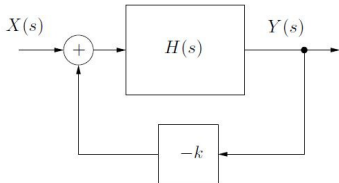
Rampa:

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s^2} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{N_1(s)}{D(s)} \Rightarrow y(t) = at + b + \text{transitório},$$

$a = H(0)$ e $b = \dot{H}(0)$.

Exercício

1. Determine a resposta em regime permanente do sistema em malha-aberta e malha-fechada com $k = 1$ e função de transferência BIBO estável



com $H(s) = \frac{5}{s^3 + 5s^2 + 5s + 5}$
às entradas

- a) Degrau unitário;
- b) Rampa.

Solução (Malha-aberta):

a)

b)

Solução (Malha-fechada):

a)

b)

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 3.**