

# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismos

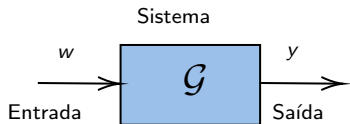
## Parte 1.2: Revisão de Análise Linear

**Professora:** Cecília de Freitas Morais  
**Auxiliar didático (PED):** Artêmio Andrade Barros

e-mails: cfmorais@unicamp.br  
a242988@dac.unicamp.br

página: <https://cfmorais.fee.unicamp.br/>

- Um sinal é uma função  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  que descreve o comportamento temporal de um fenômeno. Tipicamente, o conjunto de instantes de tempo  $\mathbb{T}$  pode ser  $\mathbb{R}_+$  (tempo contínuo) ou  $\mathbb{N}$  (tempo discreto).
- Um sistema dinâmico  $\mathcal{G} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Y}$  é uma transformação que leva um sinal de entrada  $w \in \mathbb{W}$  em um sinal de saída  $y \in \mathbb{Y}$ .



## Características de interesse:

O sistema  $\mathcal{G} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Y}$  é dito:

- **Linear** se

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\} &= \alpha_1 \mathcal{G}\{w_1\} + \alpha_2 \mathcal{G}\{w_2\} \\ &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\end{aligned}$$

para quaisquer  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  e  $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ .

- **Invariante no tempo** se o operador  $\mathcal{G}$  comutar com o atraso no tempo:

$$\mathcal{G}\{w(t - \tau)\} = y(t - \tau)$$

- **Causal** se a saída  $y$  em qualquer instante não depender de valores futuros da entrada, ou seja, o sistema não é antecipativo ou preditivo.

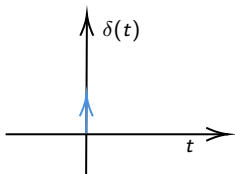
# Revisão Sistemas LTI

- A principal classe de sistemas estudados neste curso é a dos **sistemas lineares e invariantes com o tempo (LTI)**. Estes sistemas são completamente caracterizados pela sua **resposta ao impulso**.

## Impulso unitário

O impulso unitário  $\delta(t)$  é a função que obedece:

$$\delta(t) = 0, \forall t \neq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$



Conhecida a resposta ao impulso de um sistema LTI ( $h(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$ ), temos que a sua resposta a uma entrada  $w$  qualquer será dada pela convolução

$$y(t) = w(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

Se o sistema for causal,  $h(t) = 0$  para todo  $t < 0$ , o que implica que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t w(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, considerando (como faremos daqui para frente) que a entrada é nula antes de  $t = 0$ , temos que

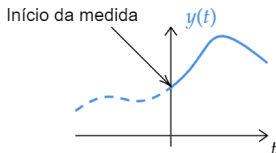
$$y(t) = \int_0^t w(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

# Revisão Modelos a Tempo Contínuo

- Grande parte dos sistemas LTI de interesse podem ser modelados por EDOs da forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_mw^{(m)}(t) + \dots + b_1\dot{w}(t) + b_0w(t)$$

com  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ .



## Estado

- A EDO do modelo a tempo contínuo ao lado vem, normalmente, acompanhada de condições iniciais, que definem o estado do sistema:

$$y(0^-), \dot{y}(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$$

- O estado de um sistema em um instante  $t_0$  é a informação necessária para que, juntamente com a entrada a partir de  $t_0$ , seja possível determinar  $y(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

## Condições Iniciais da Entrada

- Vamos supor também que as entradas são aplicadas apenas em  $t = 0$ , o que implica que

$$w(0^-) = \dot{w}(0^-) = \dots = 0$$

# Transformada de Laplace

- Na engenharia de controle, em vez da solução tradicional das equações diferenciais lineares muitas vezes emprega-se a transformada de Laplace.
- A transformada de Laplace converte equações diferenciais na variável real  $t$  em equações algébricas na variável complexa  $s$ .
- A vantagem em usar a transformada de Laplace é que as equações algébricas resultantes são mais simples de serem estudadas que as equações diferenciais originais.
- A solução das equações diferenciais por meio da transformada de Laplace segue a estrutura da Figura 2.8.



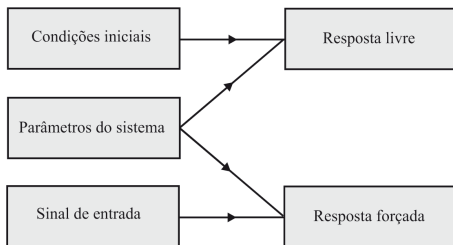
Figura 2.8 Etapas empregadas na solução de equações diferenciais lineares.

# Transformada de Laplace

A resposta de um sistema linear depende dos parâmetros do próprio sistema e pode ser sempre decomposta em duas partes:

- uma parte associada apenas às condições iniciais, chamada resposta livre ou **solução homogênea**,
- e outra associada apenas ao sinal de entrada, chamada resposta forçada.

A Figura 2.9 resume essas dependências.



**Figura 2.9** Dependências da resposta de um sistema linear.

# Transformada de Laplace

A transformada unilateral de Laplace de uma função  $f(t)$ , com  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ , é definida como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1)$$

sendo  $f(t)$  e  $t$  reais;  $F(s)$  e  $s$  complexos.

- A transformada (1) é chamada unilateral porque somente se aplica a funções de  $t$  que são nulas para  $t < 0$ . Existe também a transformada bilateral (cuja integral vai de  $-\infty$  a  $+\infty$ ), usualmente empregada na engenharia de comunicações.
- O limite inferior da integral (1) é  $0-$  para permitir que a integral contenha eventuais impulsos na origem.
- É claro que a convergência da integral (1), isto é, a existência da transformada de Laplace, depende do valor de  $s$  (isso é chamado de domínio da transformada, a integral é válida para  $s \in \Omega_f$ ).

# Transformada de Laplace: Degrau unitário

A função degrau unitário é definida como

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (2)$$

O gráfico da função degrau unitário é apresentado na Figura 2.10.

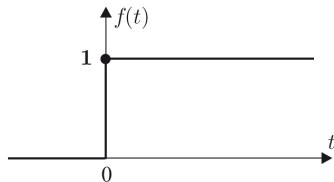


Figura 2.10 Função degrau unitário.

Aplicando a definição de transformada de Laplace (1), obtém-se

$$F(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (3)$$



# Transformada de Laplace: Exponencial

A função exponencial é definida como

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (4)$$

sendo  $a$  uma constante.

Aplicando a definição de transformada de Laplace (1), obtém-se

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-at}] = \int_{0-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \Big|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}. \quad (5)$$

# Transformada de Laplace: Rampa unitária

A função rampa unitária é definida como

$$f(t) = \begin{cases} t & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (6)$$

O gráfico da rampa unitária é apresentada na Figura 2.11.

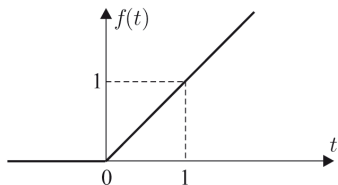


Figura 2.11 Função rampa unitária.

Aplicando a definição de transformada de Laplace (1), obtém-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[t] = \int_{0-}^{\infty} te^{-st} dt = t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

# Transformada de Laplace: Seno

A função seno é definida como

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (8)$$

sendo  $\omega$  uma constante real qualquer.

A função seno também pode ser escrita como

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}. \quad (9)$$

A transformada de Laplace da Equação (9) é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)] = \frac{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]}{2j}. \quad (10)$$

Aplicando a transformada de Laplace da função exponencial (5) na Equação (10), obtém-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

## Transformada de Laplace: Cosseno

A função cosseno é definida como

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (12)$$

sendo  $\omega$  uma constante real qualquer.

A função cosseno também pode ser escrita como

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}. \quad (13)$$

A transformada de Laplace da Equação (13) é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]}{2}. \quad (14)$$

Analogamente ao caso da função seno, aplicando a transformada de Laplace da função exponencial (5) na Equação (14), obtém-se

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

# Transformada de Laplace: Impulso unitário

A função pulso unitário, representada na Figura 2.12, é dada por

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq t < a, \\ 0 & t < 0 \text{ e } t \geq a. \end{cases} \quad (16)$$

Chama-se unitário porque sua integral de  $-\infty$  a  $+\infty$  é igual a 1.

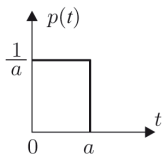


Figura 2.12 Função pulso unitário.

A função impulso<sup>1</sup> unitário ou função  $\delta(t)$  de Dirac é o caso-limite da função pulso quando  $a \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} & 0 \leq t < a, \\ 0 & t < 0 \text{ e } t \geq a. \end{cases} \quad (17)$$

---

<sup>1</sup>A função impulso pertence à classe de funções chamadas de generalizadas. Por simplicidade, está é apresentada aqui de maneira intuitiva, sem o devido rigor matemático.

## Transformada de Laplace: Impulso unitário

A função impulso unitário “ocorre” apenas em  $t = 0$ , com amplitude infinita. Porém, a “área” sob a função é igual a 1. Desse modo, a função impulso unitário também pode ser definida como

- $\delta(t) = 0$  para  $\forall t \neq 0$  e
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1$  para  $\forall t_1 > 0$  e  $t_2 > 0$ .

Obviamente um sinal com amplitude infinita e duração nula não é fisicamente realizável. Porém, um sinal de amplitude “grande” e duração “pequena”, com relação às características de resposta de um sistema, pode ser aproximado pela função impulso.

Uma propriedade da função impulso é:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$ .

A transformada de Laplace da função impulso unitário é dada por

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (18)$$

pois o integrando só é não nulo na origem, onde a exponencial vale 1.

# Propriedades da transformada de Laplace: Linearidade

Sejam  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$  e  $a$  e  $b$  constantes. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_{0-}^{\infty} (af_1(t) + bf_2(t))e^{-st} dt \\ &= a \int_{0-}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + b \int_{0-}^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt \\ &= aF_1(s) + bF_2(s).\end{aligned}\tag{19}$$

# Propriedades da transformada de Laplace: Translação no campo complexo

Seja  $a$  uma constante real ou complexa. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] &= \int_{0-}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt \\ &= F(s+a).\end{aligned}\tag{20}$$



## Propriedades da transformada de Laplace: Mudança de escala de tempo

Seja  $a > 0$  uma constante. Então

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0-}^{\infty} f(at)e^{-st} dt. \quad (21)$$

Fazendo a mudança de variável  $\tau = at$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{0-}^{\infty} f(\tau)e^{-(s/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

## Propriedades da transformada de Laplace: Translação no tempo

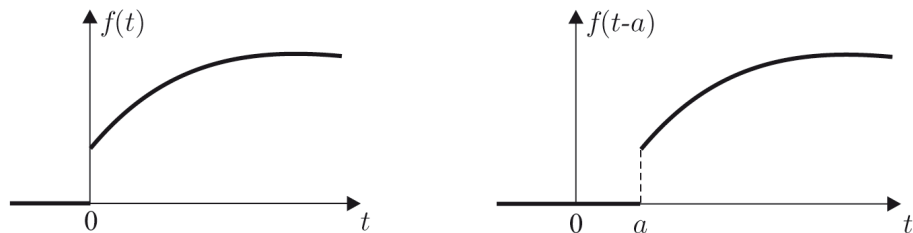
Seja  $a > 0$  uma constante e  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ . Então  $f(t - a)$  representa o sinal  $f(t)$  translacionado “para depois”, conforme mostra a Figura 2.13. Sua transformada é

$$\mathcal{L}[f(t - a)] = \int_{0-}^{\infty} f(t - a)e^{-st} dt. \quad (23)$$

Fazendo a mudança de variável  $\tau = t - a$  e sabendo-se que  $f(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a)] &= \int_{0-}^{\infty} f(\tau)e^{-s(a+\tau)} d\tau \\ &= e^{-as} \int_{0-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-as}F(s). \end{aligned} \quad (24)$$

## Propriedades da transformada de Laplace: Translação no tempo



**Figura 2.13** Funções  $f(t)$  e  $f(t - a)$ .

É importante observar que, para  $a < 0$ , a transformada de Laplace unilateral da função  $f(t - a)$  não é definida.

# Propriedades da transformada de Laplace: Transformada da derivada de primeira ordem

Seja  $\dot{f}(t)$  a derivada de uma função  $f(t)$  com relação ao tempo. Então

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0-). \quad (25)$$

Para demonstrar a expressão (25) basta aplicar a definição de transformada de Laplace e realizar uma integração por partes, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Considerando que para a existência da transformada de Laplace o produto  $f(t)e^{-st}$  deve tender a zero quando  $t$  tende a infinito, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= -f(0-) + s \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0-). \end{aligned}$$

## Propriedades da transformada de Laplace: Transformada da derivada de segunda ordem

Sendo  $g(t) = \dot{f}(t)$ , então

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s) = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0-). \quad (26)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= \mathcal{L}[\dot{g}(t)] = sG(s) - g(0-) \\ &= s(sF(s) - f(0-)) - \dot{f}(0-) \\ &= s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-). \end{aligned} \quad (27)$$

# Propriedades da transformada de Laplace: Transformada da derivada de ordem $n$

Genericamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] \\ &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}\dot{f}(0-) - \\ &\quad \dots - sf^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-).\end{aligned}\quad (28)$$

# Propriedades da transformada de Laplace: Transformada da integral

Seja

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Então,

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \phi(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\varphi(0-)}{s}. \quad (30)$$

De fato, da definição (29), tem-se que  $\dot{\varphi}(t) = f(t)$ . Aplicando a transformada da derivada de primeira ordem, obtém-se

$$F(s) = s\phi(s) - \varphi(0-) \Rightarrow \phi(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\varphi(0-)}{s}. \quad (31)$$

## Propriedades da transformada de Laplace: Convolução geral

Considere duas funções causais  $f(t)$  e  $g(t)$ , nulas para  $t < 0$ . A operação de convolução<sup>2</sup>, indicada por  $f(t) * g(t)$ , é definida como

$$f(t) * g(t) \triangleq \int_{0-}^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (32)$$

A transformada de Laplace da Equação (32) é dada por

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \int_{0-}^{\infty} \left( \int_{0-}^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) e^{-st} dt. \quad (33)$$

A integral até  $t$  pode ser convertida em uma integral até  $\infty$  por meio do seguinte artifício

$$\int_{0-}^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_{0-}^{\infty} 1(t - \tau)f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (34)$$

sendo  $1(t - \tau)$  a função degrau unitário que vale 1 para  $t \geq \tau$  e zero para  $t < \tau$ .

---

<sup>2</sup>A operação de convolução é fundamental na teoria dos sistemas lineares: se  $f(t)$  é o sinal de entrada e  $g(t)$  é a resposta do sistema ao impulso unitário, então, a convolução  $f(t) * g(t)$  é a saída do sistema.



## Propriedades da transformada de Laplace: Convolução geral

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t) * g(t)] &= \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} 1(t-\tau)f(t-\tau)g(\tau)d\tau e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} 1(t-\tau)f(t-\tau)e^{-st} dt \int_{0-}^{\infty} g(\tau)d\tau.\end{aligned}\quad (35)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = t - \tau$  e notando que  $1(u)f(u) = 0$  para  $u < 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t) * g(t)] &= \int_{0-}^{\infty} f(u)e^{-s(u+\tau)} du \int_{0-}^{\infty} g(\tau)d\tau \\ &= \int_{0-}^{\infty} f(u)e^{-su} du \int_{0-}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= F(s)G(s).\end{aligned}\quad (36)$$

O resultado (36) mostra que a transformada de Laplace da convolução de duas funções é igual ao produto das transformadas de Laplace de suas funções. É importante enfatizar que a transformada de Laplace do produto de duas funções no domínio do tempo é diferente do produto das transformadas de Laplace de suas funções, ou seja,

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] \neq F(s)G(s).\quad (37)$$

# Teorema do valor inicial

O teorema do valor inicial permite determinar o valor inicial de uma função  $f(t)$  em  $t = 0_+$  (instante mínimo para  $t$  positivo) a partir de sua transformada de Laplace. Se existir  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  e se existirem os limites da Equação (38), então

$$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (38)$$

Fazendo  $s \rightarrow \infty$  na transformada da derivada de primeira ordem (25), obtém-se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt. \quad (39)$$

Supondo que  $f(t)$  é contínua inclusive na origem, então a sua derivada não contém impulsos. Logo

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = 0. \quad (40)$$

Portanto, da Equação (39) tem-se que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0-) = f(0_+), \quad (41)$$

pois a função  $f(t)$  é contínua na origem, por hipótese.

# Teorema do valor final

O teorema do valor final permite determinar o valor estacionário de uma função  $f(t)$  a partir de sua transformada de Laplace. Se existir  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  e se existirem os limites da Equação (42), então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (42)$$

Para mostrar o teorema, basta fazer  $s \rightarrow 0$  na transformada da derivada de primeira ordem (25), ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[\dot{f}(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t) dt \\ &= f(\infty) - f(0-). \end{aligned} \quad (43)$$

Portanto,

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (44)$$

Prova-se que este teorema não é válido se  $F(s)$  é descontínua em algum ponto de  $s$ , tal que  $\Re(s) \geq 0$ . De fato, quando  $\Re(s) > 0$ , a função  $f(t)$  cresce exponencialmente, ao passo que quando  $\Re(s) = 0$  a função  $f(t)$  é composta de senoides e cossenoides. Em ambos os casos não existe o limite da função  $f(t)$  quando  $t$  tende a infinito.

## Exemplo 2.7

Determine os valores inicial e final da função  $f(t)$ , correspondente à transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad (45)$$

## Exemplo 2.7

### Solução:

Pelo teorema do valor inicial (38), obtém-se

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s(s+2)} = 0. \quad (46)$$

Pelo teorema do valor final (42), obtém-se

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+2)} = 0,5. \quad (47)$$

O mesmo resultado pode ser obtido observando-se na tabela de transformadas de Laplace que

$$f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{2}. \quad (48)$$

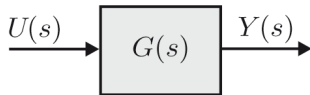
No caso de o denominador da função  $F(s)$  ser  $s(s-2)$ , o teorema do valor final não fornece o valor correto, pois a função  $f(t)$  cresce exponencialmente.

Tabela 2.3 Tabela de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )	$\frac{1}{(s+a)^n}$
Rampa unitária $t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )	$\frac{1}{s^n}$
$\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
$\frac{1}{a^2}(b-be^{-at}+(a-b)ate^{-at})$	$\frac{s+b}{s(s+a)^2}$
$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\frac{(d-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{(d-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{(d-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{s+d}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{t}{2\omega} \text{sen } \omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \text{cos } \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$1 - \text{cos } \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$ ( $0 < \xi < 1$ )	$\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \text{cos}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right)$ ( $0 < \xi < 1$ )	$\frac{1}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

# Função de transferência

Considere o sistema de tempo contínuo, linear e invariante no tempo, com entrada  $U(s)$  e saída  $Y(s)$  da Figura 2.14.



**Figura 2.14** Função de transferência.

A função de transferência  $G(s)$  é definida como o quociente da transformada de Laplace do sinal de saída  $Y(s)$  pela transformada de Laplace do seu sinal de entrada  $U(s)$ , quando todas as condições iniciais são nulas ( $c.i. = 0$ ), ou seja,

$$G(s) \triangleq \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{c.i.=0} \quad (49)$$

# Função de transferência

A função de transferência  $G(s)$  pode ser obtida a partir da equação diferencial que representa a dinâmica do sistema. Suponha que um sistema seja representado pela seguinte equação

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (50)$$

Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros da Equação (50) e supondo condições iniciais nulas<sup>3</sup>, obtém-se

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0}, \text{ com } m \leq n. \quad (51)$$

Analizando a Equação (51), percebe-se que a função de transferência de sistemas lineares com parâmetros concentrados, invariantes no tempo, é uma função racional de  $s$ , ou seja, é o quociente de dois polinômios em  $s$ , com coeficientes reais. Logo, raízes complexas só podem ocorrer se forem aos pares conjugados.

---

<sup>3</sup> A exigência de condições iniciais nulas é essencial para garantir a unicidade da função de transferência.



# Função de transferência

- Em todos os sistemas físicos reais a resposta não pode preceder à excitação (sistemas causais).
- Em consequência, prova-se que o grau do polinômio do numerador é sempre menor ou igual ao grau do polinômio do denominador de  $G(s)$  ( $m \leq n$ ).
- Os pontos singulares em que a função  $G(s)$  ou suas derivadas tendem ao infinito são chamados de **polos** de  $G(s)$ . Já os pontos em que a função  $G(s)$  se anula são chamados de **zeros** de  $G(s)$ .
- No caso de  $G(s)$  ser racional, como na Equação (51), tem-se que
  - os **polos** são as raízes do polinômio do denominador de  $G(s)$ ;
  - os **zeros** são as raízes do polinômio do numerador de  $G(s)$ .

A função de transferência  $G(s)$  também pode ser escrita em termos de seus polos ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) e de seus zeros ( $z_1, z_2, \dots, z_m$ ), ou seja,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \text{ com } m \leq n. \quad (52)$$

## Exemplo 2.8

Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{s + 5}{s(s^2 + 4s + 68)} = \frac{s + 5}{s(s + 2 + 8j)(s + 2 - 8j)}. \quad (53)$$

A função de transferência  $G(s)$  possui três polos, localizados em  $s = 0$ ,  $s = -2 - 8j$  e  $s = -2 + 8j$ , e um zero finito localizado em  $s = -5$ . A distribuição de polos e zeros no plano  $s$  está representada na Figura 2.15. De acordo com esta figura, polos e zeros do plano  $s$  são sempre representados pelos símbolos “ $\times$ ” e “ $\circ$ ”, respectivamente.

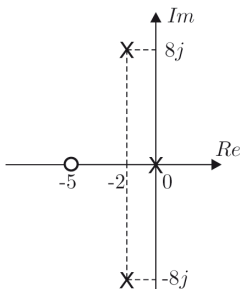
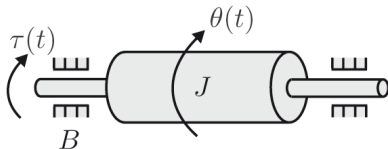


Figura 2.15 Distribuição de polos e zeros no plano  $s$ .

## Exemplo 2.9



**Figura 2.16** Sistema de inércia e atrito rotacional.

Considere o sistema da Figura 2.16, em que  $J$  representa a inércia rotacional e  $B$  representa o coeficiente de atrito rotacional. Supondo que a entrada do sistema é o torque  $\tau(t)$  e que a saída é o deslocamento angular  $\theta(t)$ , a equação diferencial que representa a dinâmica do sistema é dada por

$$\tau(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (54)$$

## Exemplo 2.9

Aplicando a propriedade da derivada e supondo condições iniciais nulas, a transformada de Laplace da Equação (54) resulta como

$$T(s) = Js^2\Theta(s) + Bs\Theta(s). \quad (55)$$

Logo, a função de transferência do sistema do sistema é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs}. \quad (56)$$

A função de transferência (56) possui dois polos, localizados em  $s = 0$  e em  $s = -B/J$ , conforme representado na Figura 2.17.

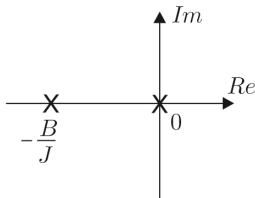


Figura 2.17 Distribuição de polos e zeros no plano  $s$ .

# Transformada de Laplace inversa

- A transformada inversa de uma função  $F(s)$  para  $t \leq 0$  é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (57)$$

em que  $c$  é um número real tal que a trajetória de integração é uma reta paralela ao eixo imaginário, localizada à direita de todos os polos de  $F(s)$ .

- Raramente a inversa da transformada de Laplace é calculada pela integral (57).
- A maneira mais simples e usual é utilizando uma tabela de transformadas.
- No caso de  $F(s)$  ser uma função racional de  $s$ , isto é, o quociente de dois polinômios que não existe na tabela, a sua consulta deve ser precedida de uma **expansão em frações parciais**.

# Expansão em frações parciais

Considere a função

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \cdots (s - p_n)}, \text{ com } m < n, \quad (58)$$

em que  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  são os polos de  $F(s)$ .

O método da expansão em frações parciais consiste em expandir a função (58) em frações que podem ser facilmente identificáveis na tabela de transformadas de Laplace.

## Expansão em frações parciais: polos distintos

Se  $F(s)$  possuir apenas polos distintos, então pode-se realizar a seguinte expansão

$$F(s) = \frac{a_1}{s - p_1} + \frac{a_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - p_n}, \quad (59)$$

e cada coeficiente  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), chamado resíduo de  $F(s)$ , vale

$$a_i = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i}. \quad (60)$$

Da tabela de transformadas de Laplace tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i}{s - p_i} \right] = a_i e^{p_i t}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n, \text{ para } t \geq 0. \quad (61)$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + a_3 e^{p_3 t} + \cdots + a_n e^{p_n t}, \text{ para } t \geq 0. \quad (62)$$

## Exemplo 2.10

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}. \quad (63)$$

Expandindo  $F(s)$  em frações parciais, obtém-se

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1}, \quad (64)$$

em que

$$a_1 = [sF(s)]_{s=0} = \left[ s \frac{s+2}{s(s+1)} \right]_{s=0} = \left[ \frac{s+2}{s+1} \right]_{s=0} = 2, \quad (65)$$

$$a_2 = [(s+1)F(s)]_{s=-1} = \left[ (s+1) \frac{s+2}{s(s+1)} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{s+2}{s} \right]_{s=-1} = -1. \quad (66)$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}. \quad (67)$$



## Exemplo 2.10

Da tabela de transformadas de Laplace obtém-se

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = 2 - e^{-t}, \text{ para } t \geq 0. \quad (68)$$

Outra maneira de calcular os coeficientes da expansão em frações parciais é a seguinte:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1} = \frac{a_1s + a_1 + a_2s}{s(s+1)}. \quad (69)$$

Identificando os polinômios dos numeradores, tem-se que

$$s(a_1 + a_2) + a_1 = s + 2. \quad (70)$$

Comparando os coeficientes dos dois membros da Equação (70), obtém-se  $a_1 = 2$  e  $a_2 = -1$ .

## Exemplo 2.11

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s^2 + s}. \quad (71)$$

Como o grau do polinômio do numerador é igual ao grau do polinômio do denominador ( $m = n = 2$ ), então é necessário realizar primeiramente uma divisão polinomial, e depois expandir o resto da divisão sobre o denominador original, ou seja,

$$F(s) = 3 + \frac{s + 2}{s(s + 1)} = 3 + \frac{2}{s} - \frac{1}{s + 1}. \quad (72)$$

Da tabela de transformadas de Laplace obtém-se

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = 3\delta(t) + 2 - e^{-t}, \text{ para } t \geq 0. \quad (73)$$

## Exemplo 2.12

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{2s + 13}{s^2 + 4s + 13}. \quad (74)$$

Expandido  $F(s)$  em frações parciais, obtém-se

$$F(s) = \frac{2s + 13}{s^2 + 4s + 13} = \frac{2s + 13}{(s + 2 + 3j)(s + 2 - 3j)} = \frac{a_1}{s + 2 + 3j} + \frac{a_2}{s + 2 - 3j}, \quad (75)$$

sendo

$$\begin{aligned} a_1 &= [(s + 2 + 3j)F(s)]_{s=-2-3j} \\ &= \left[ (s + 2 + 3j) \frac{2s + 13}{(s + 2 + 3j)(s + 2 - 3j)} \right]_{s=-2-3j} \\ &= \left[ \frac{2s + 13}{s + 2 - 3j} \right]_{s=-2-3j} \\ &= 1 + 1,5j. \end{aligned} \quad (76)$$

## Exemplo 2.12

Como os coeficientes de  $F(s)$  são reais e os polos são complexos conjugados, pode-se provar que os resíduos correspondentes são complexos conjugados. Então

$$a_2 = a_1^* = 1 - 1,5j. \quad (77)$$

sendo  $a_1^*$  o complexo conjugado de  $a_1$ .

Portanto,

$$F(s) = \frac{2s + 13}{s^2 + 4s + 13} = \frac{1 + 1,5j}{s + 2 + 3j} + \frac{1 - 1,5j}{s + 2 - 3j}. \quad (78)$$

Da tabela de transformadas de Laplace obtém-se

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + 1,5j)e^{-(2+3j)t} + (1 - 1,5j)e^{-(2-3j)t} \\ &= e^{-2t}[(1 + 1,5j)e^{-3jt} + (1 - 1,5j)e^{3jt}] \\ &= e^{-2t}[(1 + 1,5j)(\cos(3t) - j\operatorname{sen}(3t)) + (1 - 1,5j)(\cos(3t) + j\operatorname{sen}(3t))] \\ &= 2e^{-2t} \cos(3t) + 3e^{-2t} \operatorname{sen}(3t), \text{ para } t \geq 0. \end{aligned} \quad (79)$$

## Exemplo 2.12

Outra maneira de calcular a transformada inversa quando os polos são complexos conjugados é usar diretamente as funções tabeladas

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} e \quad (80)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos(\omega t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}. \quad (81)$$

Escrevendo  $F(s)$  no formato das funções tabeladas (80) e (81), obtém-se

$$F(s) = \frac{2s+13}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)+9}{(s+2)^2+3^2} = 2\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2} + 3\frac{3}{(s+2)^2+3^2}. \quad (82)$$

Portanto, a transformada inversa de  $F(s)$  é dada por

$$f(t) = 2e^{-2t}\cos(3t) + 3e^{-2t}\sin(3t), \text{ para } t \geq 0. \quad (83)$$

# Polos múltiplos

Se  $F(s)$  possuir um polo  $p$  com multiplicidade  $r$ , então devem ser desenvolvidas  $r$  frações, associadas a  $p$ , ou seja,

$$\frac{b_1}{(s-p)^r} + \frac{b_2}{(s-p)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_r}{(s-p)}.$$

Cada constante  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) pode ser calculada como

$$b_j = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} [(s-p)^r F(s)]. \quad (84)$$

A Equação (84) também se aplica no caso de  $F(s)$  possuir polos complexos conjugados múltiplos.

## Exemplo 2.13

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s - 2)(s + 1)^2}. \quad (85)$$

Note que  $F(s)$  possui um polo múltiplo em  $s = -1$ , com multiplicidade  $r = 2$ . Assim,  $F(s)$  pode ser expandida na seguinte soma de frações parciais

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s - 2)(s + 1)^2} = \frac{a_1}{s - 2} + \frac{b_1}{(s + 1)^2} + \frac{b_2}{s + 1}, \quad (86)$$

## Exemplo 2.13

sendo

$$a_1 = [(s-2)F(s)]_{s=2} = \left[ (s-2) \frac{s^2 - 2s + 1}{(s+1)^2(s-2)} \right]_{s=2} = \frac{1}{9},$$

$$b_1 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)^2 F(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[ (s+1)^2 \frac{s^2 - 2s + 1}{(s+1)^2(s-2)} \right] = -\frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} [(s+1)^2 F(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 \frac{s^2 - 2s + 1}{(s+1)^2(s-2)} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \left[ \frac{(2s-2)(s-2) - (s^2 - 2s + 1)}{(s-2)^2} \right] = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$



## Exemplo 2.13

Portanto,

$$F(s) = \frac{1}{9} \frac{1}{(s-2)} - \frac{4}{3} \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{8}{9} \frac{1}{(s+1)}. \quad (87)$$

Da tabela de transformadas de Laplace obtém-se

$$f(t) = \frac{1}{9} e^{2t} - \frac{4}{3} t e^{-t} + \frac{8}{9} e^{-t}, \text{ para } t \geq 0. \quad (88)$$

Os coeficientes da expansão em frações parciais também podem ser calculados através de uma comparação dos coeficientes do polinômio do numerador, ou seja,

$$F(s) = \frac{a_1}{s-2} + \frac{b_1}{(s+1)^2} + \frac{b_2}{s+1} = \frac{a_1(s+1)^2 + b_1(s-2) + b_2(s-2)(s+1)}{(s-2)(s+1)^2} \quad (89)$$

## Exemplo 2.13

Logo,

$$\begin{aligned} a_1(s+1)^2 + b_1(s-2) + b_2(s-2)(s+1) &= s^2 - 2s + 1 \\ s^2(a_1 + b_2) + s(2a_1 + b_1 - b_2) + a_1 - 2b_1 - 2b_2 &= s^2 - 2s + 1. \end{aligned} \quad (90)$$

Comparando os coeficientes dos dois membros da Equação (90), obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_1 + b_2 = 1, \\ 2a_1 + b_1 - b_2 = -2, \\ a_1 - 2b_1 - 2b_2 = 1. \end{cases} \quad (91)$$

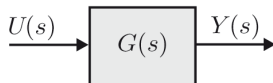
Resolvendo o sistema (91), obtém-se

$$a_1 = \frac{1}{9}, \quad b_1 = -\frac{4}{3}, \quad b_2 = \frac{8}{9}.$$

# Diagramas de blocos

A análise de sistemas em engenharia costuma ser feita a partir de sua representação em diagramas de blocos. A representação convencional de um bloco é realizada por meio de um retângulo, com a função de transferência correspondente escrita em seu interior.

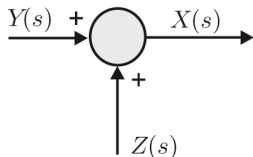
O diagrama de blocos de um sistema com função de transferência  $G(s)$ , entrada  $U(s)$  e saída  $Y(s)$  é apresentado na Figura 2.18.



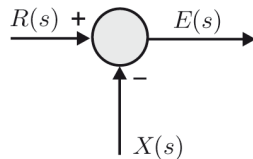
**Figura 2.18** Representação de uma função de transferência.

A representação da Figura 2.18 mostra que os sinais de entrada e saída estão relacionados por

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (92)$$



$$X(s) = Y(s) + Z(s)$$



$$E(s) = R(s) - X(s)$$

**Figura 2.19** Símbolos para somar ou subtrair sinais.

# Diagramas de blocos de um sistema em malha fechada

Na Figura 2.20 é apresentado o diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada. O sinal “menos” no somador é tradicionalmente adotado nos sistemas de controle em malha fechada, para enfatizar que o controle exige realimentação negativa.

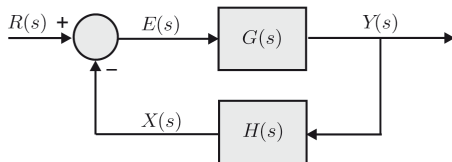


Figura 2.20 Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.

No diagrama de blocos da Figura 2.20 os seguintes sinais podem ser observados:

- $R(s)$ : sinal de referência ou *set-point* ou sinal desejado para a saída;
- $Y(s)$ : sinal de saída do sistema  $G(s)$ ;
- $E(s)$ : sinal de erro ( $E(s) = R(s) - X(s) = R(s) - H(s)Y(s)$ );
- $X(s)$ : sinal de saída do bloco  $H(s)$ .

# Diagramas de blocos de um sistema em malha fechada

- Um sistema de controle está em malha fechada quando o sinal de sua saída é usado para modificar sinais internos, ocorrendo aquilo que se chama de realimentação (*feedback*) do sinal de saída.
- Isso é o que se pode verificar no diagrama de blocos da Figura 2.20, onde o sinal de entrada do sistema  $G(s)$ , que é o sinal de erro  $E(s)$ , também depende da saída  $Y(s)$ , pois  $E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$ .
- O bloco  $H(s)$  pode representar, por exemplo, a função de transferência de um elemento de medição ou sensor.
- Supondo que o sinal de referência seja uma tensão elétrica em volts e que o sinal de saída do sistema  $G(s)$  seja uma temperatura em graus Celsius, o bloco  $H(s)$  tem a função de converter o sinal medido de graus Celsius para volts, compatibilizando as unidades entre os sinais representados por  $R(s)$  e  $X(s)$ .

## Função de transferência de malha aberta

Define-se a função de transferência de malha aberta  $FTMA(s)$  como a função que se encontra em cascata, ao percorrer a malha de realimentação, sem considerar o somador. De acordo com o diagrama de blocos da Figura 2.20, a função de transferência de malha aberta  $FTMA(s)$  é dada por

$$FTMA(s) \triangleq \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{H(s)Y(s)}{E(s)} = \frac{H(s)G(s)E(s)}{E(s)} = G(s)H(s). \quad (93)$$

## Função de transferência de malha fechada

De acordo com o diagrama de blocos da Figura 2.20, tem-se que

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)E(s), \\ &= G(s)(R(s) - X(s)), \\ &= G(s)(R(s) - H(s)Y(s)), \\ &= G(s)R(s) - G(s)H(s)Y(s). \end{aligned} \tag{94}$$

Da Equação (94), tem-se que a função de transferência de malha fechada  $FTMF(s)$  é dada por

$$FTMF(s) \triangleq \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \tag{95}$$



## Função de transferência de malha fechada

**Regra prática:** a função de transferência de malha fechada é igual à função de transferência direta  $G(s)$ , dividida por um mais a função de transferência de malha aberta  $G(s)H(s)$ .

No caso de a realimentação ser unitária, então  $H(s) = 1$ . Neste caso, a função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}. \quad (96)$$

Os diagramas de blocos podem ser arranjados utilizando-se regras de equivalência, que constituem a “álgebra” dos diagramas de blocos. A regra fundamental é a dos blocos em cascata da Figura 2.21.



**Figura 2.21** Diagrama de blocos em cascata.

# Álgebra de blocos

A função de transferência total de dois blocos em cascata é igual ao produto das funções de transferência  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  dos blocos isolados. Para justificar esta afirmação basta usar a definição de função de transferência

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} \quad (97)$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (98)$$

Algebricamente,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X(s)}{U(s)} \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s). \quad (99)$$

Nas Figuras 2.22 e 2.23 são apresentados alguns diagramas de blocos, sendo os esquemas da esquerda equivalentes aos da direita. A verificação dessas equivalências é feita simplesmente calculando a função de transferência nos dois lados.

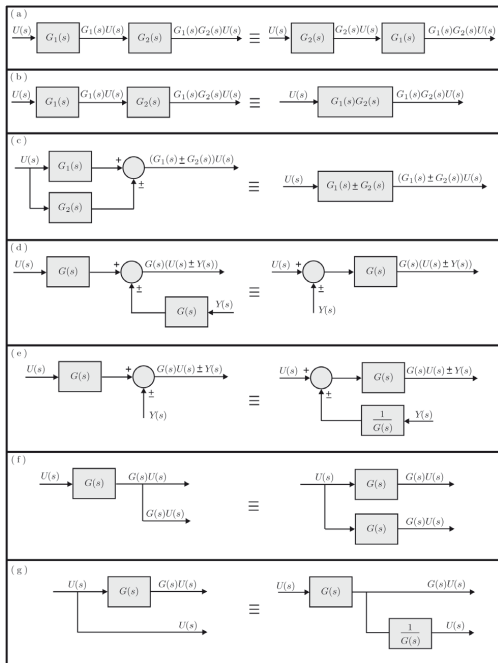


Figura 2.22 Diagramas de bloques equivalentes.

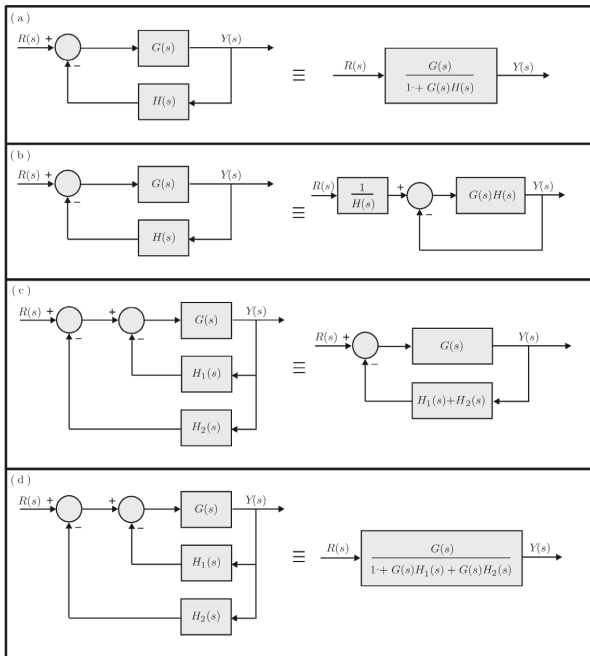


Figura 2.23 Diagramas de blocos equivalentes com realimentação.

Os slides dessa aula foram baseados em

- Castrucci, Plínio B. de L.; Bittar, Anselmo; Sales, Roberto M. “Controle Automático”, 2ª edição, LTC, 2018. ISBN: 9788521635499. – **Capítulo 2.**
- Franklin, G.F.; POWELL, J.D.; Emami-Naeini, A. “Feedback Control of Dynamic Systems”. Addison Wesley Pub. Company. USA, 1991. **Capítulo 1**
- Notas de Aula do Prof. Matheus Souza.

Apêndice

Exemplo e Exercícios

# Exemplo

Determine a resposta do sistema descrito por

$$\dot{y}(t) + y(t) = w(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

à entrada  $w(t) = \cos(2t)$ , com  $y(0^-) = 1$ .

**Resolução:**

Calculando as transformadas de ambos os membros e lembrando da propriedade da derivada:

$$(s + 1)Y(s) - y(0^-) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)} + \frac{1}{s + 1}$$

$$= \frac{s^2 + s + 4}{(s + 1)(s^2 + 4)} = \frac{a_1}{s + 1} + b_1 \frac{s}{s^2 + 2^2} + b_2 \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

$$a_1 = \frac{(-1)^2 + (-1) + 4}{((-1)^2 + 4)} = \frac{4}{5}$$

$$s^2 + s + 4 = \frac{4}{5}s^2 + \frac{16}{5} + b_1s^2 + b_1s + 2b_2s + 2b_2$$

$$b_1 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, \quad 2b_2 = 4 - \frac{16}{5} \Rightarrow b_2 = \frac{2}{5}$$

Observe que a resposta do sistema é composta de duas parcelas: a resposta à **entrada nula** e a **resposta às condições iniciais nulas**. Calculando se a anti-transformada (ou transformada inversa):

$$y(t) = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$



1. Determine a resposta do sistema descrito por

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{w}(t) + w(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

à entrada  $w(t) = e^{-4t}$ , com  $y(0^-) = 2$  e  $\dot{y}(0^-) = 1$ .

2. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{w}(t) + w(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

considerando condições iniciais nulas.

Em seguida calcule  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .