

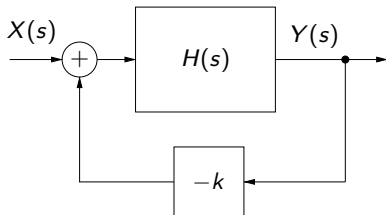
# EA616 - Análise Linear de Sistemas

## Lugar das Raízes

Prof<sup>a</sup> Cecília de Freitas Morais

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

1<sup>o</sup> Semestre 2016



$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + kH(s)}$$

- Em malha fechada, os pólos são as raízes da equação

$$1 + kH(s) = 0, H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0$$

O posicionamento dos pólos em malha fechada em função do ganho  $k \in [0, +\infty)$  é denominado **lugar das raízes**.

- Polinômios dependendo de um parâmetro  $k$  podem ser colocados na forma

$$D(s) + kN(s)$$

e interpretados como o resultado de uma realimentação proporcional (negativa) em termos de um lugar das raízes (posicionamento das raízes de  $D(s) + kN(s) = 0$  em função de  $k \in [0, +\infty)$ ).

No Matlab, o comando `rlocus([num],[den])`, com `num` contendo os coeficientes do polinômio  $N(s)$  e `den` os de  $D(s)$  mostra o lugar das raízes. Com o comando `grid`, são mostradas semi-circunferências ( $\omega_n$  constante) e semi-retas ( $\xi$  constante) associadas a um sistema de segunda ordem.

- Lugar das Raízes:

$$1 + kH(s) = 0, \quad H(s) = N(s)/D(s) \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0$$

$$D(s) = \sum_{r=0}^m \alpha_r s^r, \quad \alpha_m = 1, \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

A maior parte das regras assume  $\beta_{\ell} > 0$  (realimentação negativa).

## Regras

- 1 Simetria em relação ao eixo real.
- 2 Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente,  $k = 0$  e  $k \rightarrow +\infty$ . O lugar das raízes vai dos pólos para os zeros (contando os zeros no infinito) quando  $k$  varia de 0 a  $+\infty$ .

## Regras

- 3 Condição de fase

$$\sum_{r=1}^{\ell} \phi_r(s) - \sum_{r=1}^m \phi_r(s) = \pi$$

sendo  $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$  o ângulo do vetor do pólo  $\lambda_r$  até o ponto  $s$  do lugar das raízes e  $\phi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$  o ângulo do vetor do zero  $\gamma_r$  até o ponto  $s$  do lugar das raízes.

- 4 Condição de módulo

$$k = \left( \prod_{r=1}^m |s - \lambda_r| \right) / \left( \prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r| \right)$$

- 5 Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

## Regras

- 6 Ângulo de partida dos pólos

$$\phi_i(s) \Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^m \phi_r(s)$$

- 7 Ângulo de chegada aos zeros

$$\varphi_i(s) \Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^m \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$$

## Regras

- 8 O número de assíntotas  $\eta$  é igual ao número de zeros no infinito, isto é,  
 $\eta = m - \ell$
- 9 Ângulos das assíntotas

$$\frac{\pi(1+2r)}{m-\ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$$

- 10 Encontro das assíntotas ( $\eta \geq 2$ ): no eixo real no ponto

$$\frac{1}{\eta} \left( \sum_{r=1}^m \operatorname{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \operatorname{Re}(\gamma_r) \right)$$

## Regras

- 11 Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação

$$N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$$

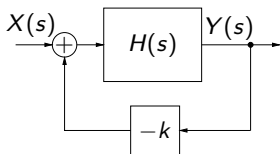
- 12 Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em  $s = \pm j\omega$ , com  $\omega \geq 0$ , solução de

$$D(s) + kN(s) = 0$$



## Exemplo

- Considere o sistema descrito pela função de transferência abaixo (pólos  $-1 \pm j$ ,  $-1$  em malha aberta) realimentado por um ganho proporcional  $k \in [0, +\infty)$



$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

- Esboce as assíntotas
- Determine os pontos de cruzamento com o eixo imaginário. Usando a tabela de Routh, determine a faixa de valores de  $k > 0$  tal que o sistema em malha fechada seja estável.