

EA616 - Análise Linear de Sistemas

Introdução à Resposta em frequência

Profa. Dra. Cecília de Freitas Morais

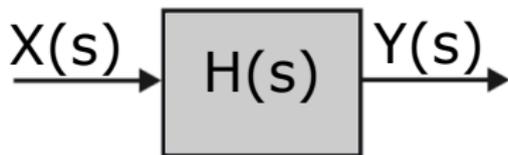
Campinas, São Paulo, Brasil

Introdução: Resposta em Frequência

- Desde a década de 1930 as respostas em frequência têm sido instrumentos consagrados para analisar e projetar sistemas técnicos de desempenho dinâmico, dispositivos elétricos, mecânicos, reguladores de processos industriais, servomecanismos, etc.
- A resposta em frequência de um sistema estável, linear e invariante no tempo consiste no conjunto das respostas do sistema, em regime permanente (após decorridos os transitórios), quando sinais senoidais de diversas frequências são aplicados na sua entrada;
- Suas representações gráficas têm grande poder de informação sobre a dinâmica dos sistemas em geral, permitindo identificar experimentalmente os seus modelos matemáticos e, no caso dos sistemas a realimentação, projetar com segurança os seus controladores.

Introdução: Resposta em Frequência

Considere o sistema linear e invariante no tempo da Figura 1 com função de transferência $H(s)$. Sendo $H(s)$ estável, sabe-se que para qualquer entrada $x(t)$ de amplitude finita a saída $y(t)$ também se mantém finita.



Suponha que $H(s)$ está sujeito a um sinal senoidal de entrada $x(t)$, de uma dada frequência ω e amplitude A , isto é,

$$x(t) = A \sin(\omega t), \quad (1)$$

cuja transformada de Laplace é

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2)$$

A transformada de Laplace da saída é dada por

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Introdução: Resposta em Frequência

Supondo, por simplicidade, que $H(s)$ possui apenas um par de polos complexos conjugados e n polos reais distintos $(-p_1, -p_2, \dots, -p_n)$, então $Y(s)$ pode ser expandida em frações parciais, ou seja,

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{a^*}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}, \quad (4)$$

sendo c_1, c_2, \dots, c_n constantes e a^* o complexo conjugado de a , que são calculados por

$$a = \left[(s + j\omega) \frac{H(s)A\omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=-j\omega} = \left[\frac{H(s)A\omega}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega} = -\frac{AH(-j\omega)}{2j}, \quad (5)$$

$$a^* = \left[(s - j\omega) \frac{H(s)A\omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=j\omega} = \left[\frac{H(s)A\omega}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{AH(j\omega)}{2j}. \quad (6)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação (4) é dada por

$$y(t) = -\frac{AH(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{AH(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} + c_1 e^{-p_1 t} + c_2 e^{-p_2 t} + \dots + c_n e^{-p_n t}. \quad (7)$$

Introdução: Resposta em Frequência

Sendo $H(s)$ estável, todos os seus polos $(-p_1, -p_2, \dots, -p_n)$ têm parte real negativa. Com isso, as exponenciais correspondentes a estes polos tendem a zero quando t tende a infinito, restando apenas os dois primeiros termos da Equação (7), ou seja,

$$y_{\infty}(t) = -\frac{AH(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AH(j\omega)}{2j}e^{j\omega t}. \quad (8)$$

Sendo $|H(j\omega)|$ e $\phi(\omega)$, o módulo e a fase de $H(j\omega)$, respectivamente, então,

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}, \quad (9)$$

$$H(-j\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}. \quad (10)$$

Da Equação (8) obtém-se

$$y_{\infty}(t) = A|H(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \right) = A|H(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

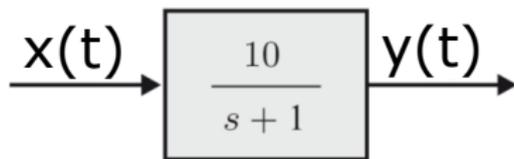
O resultado da Equação (11) permite concluir que:

- a saída em regime permanente de um sistema estável, linear e invariante no tempo com entrada senoidal é também uma senoide com a mesma frequência da entrada;
- a amplitude da senoide de saída vale:
 $|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)| = A|H(j\omega)|;$
- a defasagem entre entrada e saída é dada por: $\phi(\omega) = \angle H(j\omega);$
- para obter a completa descrição dos efeitos da entrada senoidal no sistema $H(s)$ basta substituir s por $j\omega$ em $H(s)$ e calcular o módulo e a fase do número complexo resultante.

São estes resultados que justificam o nome de resposta em frequência para a função $H(j\omega)$.

Exemplo 5.1

Determinar a saída $y_{\infty}(t)$ em regime permanente do sistema linear e invariante no tempo da Figura 2, quando é aplicada a entrada $x(t) = 2\text{sen}(3t)$.



O sinal de entrada $x(t)$ é uma senoide com frequência $\omega = 3 \text{ rad/s}$ e amplitude $A = 2$. Logo, a saída $y_{\infty}(t)$ em regime permanente também é uma senoide com a mesma frequência da entrada. Da Equação (11) obtém-se

$$y_{\infty}(t) = 2|H(j3)|\text{sen}(3t + \phi(3)). \quad (12)$$

Exemplo 5.1

Substituindo s por $j\omega$ no sistema da Figura 2, obtém-se

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{10}{j\omega + 1} \right| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}. \quad (13)$$

Para $\omega = 3$

$$|H(j3)| = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 1}} \approx 3,16. \quad (14)$$

A fase de $H(j3)$ vale

$$\phi(3) = -\arctan(3) \approx -71,6^\circ. \quad (15)$$

Portanto, a saída $y_\infty(t)$ em regime permanente é dada por

$$y_\infty \approx 6,32\text{sen}(3t - 71,6^\circ). \quad (16)$$

Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode consistem em dois gráficos que, conjuntamente, representam a resposta em frequência:

- módulo de $H(j\omega)$ versus frequência ω , ambos em escala logarítmica;
- fase de $H(j\omega)$ versus frequência ω , esta última em escala logarítmica.

O módulo de $H(j\omega)$ pode ser também representado por $20 \log |H(j\omega)|$, ou seja, empregando a unidade denominada decibel (dB). As vantagens em desenhar os gráficos em escalas logarítmicas são as seguintes:

- permitem transformar produtos e divisões em somas e subtrações, respectivamente;
- fornecem boas aproximações por meio de segmentos de reta, sendo suas intersecções facilmente associadas aos polos e zeros da função de transferência;
- permitem abranger maiores faixas de valores das variáveis envolvidas, especialmente da frequência.