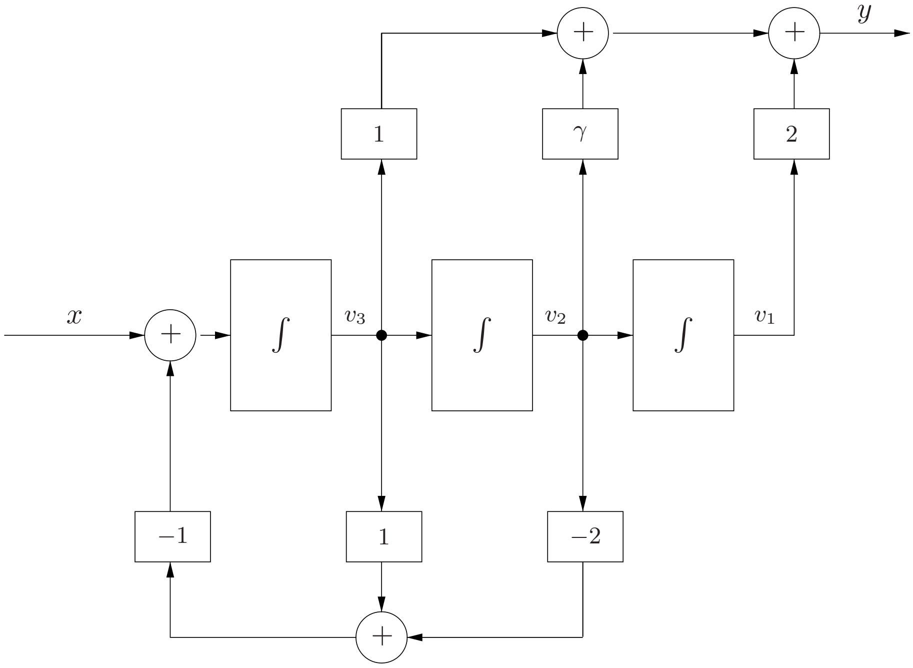
Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1ª Questão: Considere o sistema representado pelo seguinte diagrama de blocos (1,0 ponto)



1	
2	
3	
4	
5	

a) O sistema é controlável? Justifique.

Solução: Sim, pois está na forma canônica controlável, consequentemente, a matriz de controlabilidade tem rank completo, ou seja, $\det(\text{Ctrb}(A, b)) \neq 0$.

b) Determine os valores de γ para os quais o sistema é não observável.

Solução: Se $\gamma = \pm 3$ então $\det(\text{Obsv}(A, c)) = 0$ e, portanto, o sistema é não observável.

2ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 - 1 \end{bmatrix} v(t).$$

a) Determine uma transformação P que produza uma representação $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ do sistema na forma canônica e evidencie os modos **controláveis** e **não-controláveis** (1,0 ponto).

Solução:

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = 0.$$

Modo controlável: -3, modo não-controlável: 1.

b) Considerando os critérios de estabilidade estudados em aula, responda (1,0 ponto):

i) O sistema é BIBO estável? Justifique sua resposta.

Solução:

$$H(s) = \bar{c}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b} + \bar{d} = \frac{2}{s+3},$$

Como o único polo da função de transferência tem parte real negativa ($\lambda = -3$), então o sistema é BIBO estável.

ii) O sistema é assintoticamente estável? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -3 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1,$$

O sistema não é assintoticamente estável. Como há um autovalor com parte real positiva ($\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$), então o sistema é instável.

3ª Questão: Considere o sistema linear autônomo descrito pela equação dinâmica

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2-\gamma \end{bmatrix} v(t).$$

a) Determine (justificando sua resposta) qual é a faixa de valores de γ para a qual o sistema é classificado como (1,0 ponto)

i) instável;

Solução:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+1)(\lambda - (2-\gamma) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2-\gamma,$$

Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, então se e somente se $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$ o sistema é instável. Portanto o sistema é instável se $\gamma < 2$.

ii) marginalmente estável.

Solução:

Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, então se e somente se $\mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$, ou seja, $\gamma = 2$ o sistema é marginalmente estável.

b) Determine a matriz P solução da equação de Lyapunov (indicando a matriz Q utilizada) associada ao sistema dado no enunciado dessa questão com $\gamma = 4$. Em função da solução encontrada, classifique o sistema (**justificando sua resposta**) como assintoticamente estável ou não (1,0 ponto).

Solução:

$$A'P + PA = -Q \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad Q = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Como os autovalores de P são positivos ($\lambda_1 \approx 2.76$ e $\lambda_2 \approx 7.24$), então a matriz P é definida positiva e o sistema é assintoticamente estável.

4ª Questão: Considere o sistema linear descrito pela seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{3s^3 + (10-k)s^2 + ks + 3}$$

a) Determine o intervalo do parâmetro k para o qual o sistema seja BIBO estável (1,0 ponto).

Solução:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 3 & k \\ s^2 & 10-k & 3 \\ s^1 & \frac{-k^2+10k-9}{10-k} & \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

$$10-k>0 \Rightarrow k<10,$$

$$\frac{-k^2+10k-9}{10-k}>0 \Rightarrow -k^2+10k-9>0 \Rightarrow 1<k<9.$$

O intervalo para o qual o sistema é BIBO estável é $1<k<9$.

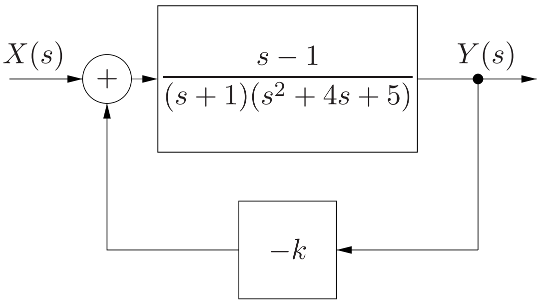
b) Considere $k=10$. Usando a tabela de Routh determine o número de polos de $H(s)$ com parte real positiva (1,0 ponto).

Solução:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 3 & 10 \\ s^2 & \epsilon & 3 \\ s^1 & \frac{10\epsilon-9}{\epsilon} & \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

Se $\epsilon \to 0^-$ ocorrem duas trocas de sinal, se $\epsilon \to 0^+$ também ocorrem duas trocas de sinal, portanto a função de transferência $H(s)$ possui duas raízes com parte real positiva.

5$^{\underline{a}}$ Questão: Considere o sistema em malha fechada descrito pelo seguinte diagrama de blocos



cuja função de transferência em malha aberta tem polos em $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2+j$, $\lambda_3=-2-j$ e zero em $\gamma_1=1$.

a)Esboce o lugar das raízes para o sistema realimentado considerando, em especial, os seguintes aspectos:

i) Assíntotas: ângulo e ponto de encontro (1,0 ponto);

Solução: Número de assíntotas: $\eta=m-\ell=3-1=2$. Ângulos das assíntotas: $\frac{(2r+1)\pi}{\eta}=\pm\frac{\pi}{2}$. Encontro das assíntotas: $\frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Re}(\lambda_r)-\sum_{r=1}^{\ell}\mathrm{Re}(\gamma_r)\right)=\frac{1}{2}(-1-2-2-1)=-3.$

ii) Cruzamento com o eixo imaginário ($\omega>0$) e a faixa de valores de $k>0$ para os quais o sistema em malha fechada é estável (1,0 ponto).

Solução: Substituindo $s=jw$ em $D(s)+kN(s)=0$, tem-se

$$(j\omega)^3+5(j\omega)^2+9(j\omega)+5+k(jw-1)=(-5\omega^2-k+5)+j\omega(-\omega^2+k+9)=0.$$

Igualando a parte imaginária a zero obtém-se:

$$\omega(-\omega^2+k+9)=0 \Rightarrow \omega=0, \text{ ou } \omega^2=k+9.$$

Substituindo $\omega=0$ na parte real da equação, tem-se

$$-5\omega^2-k+5=0 \Rightarrow k=5.$$

Substituindo $\omega^2=k+9$ na parte real da equação, tem-se

$$-5(k+9)-k+5=0 \Rightarrow -6k-40=0 \Rightarrow k=-20/3<0.$$

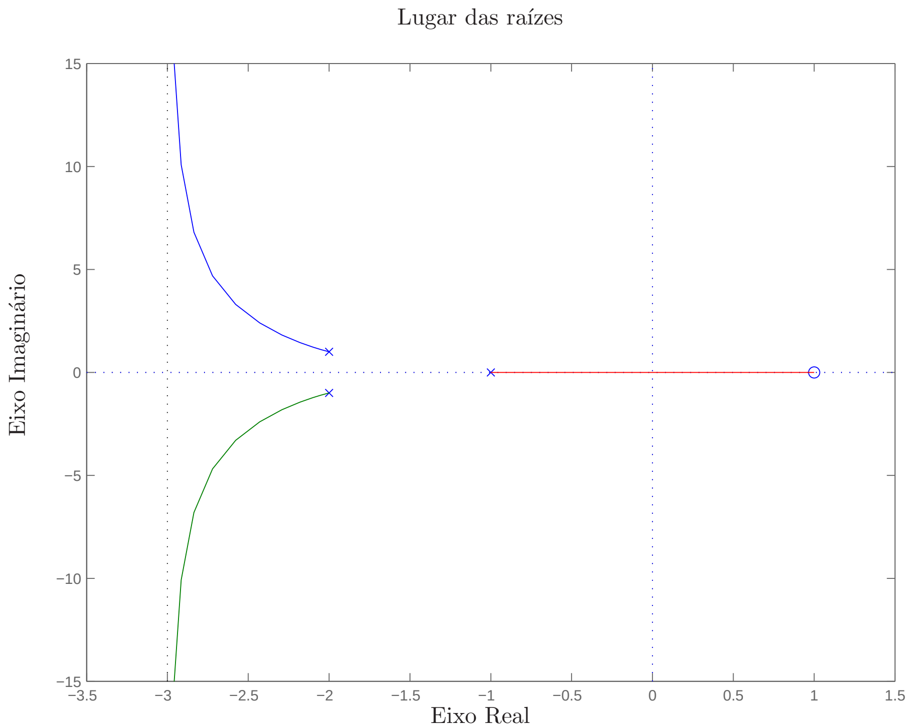
Como k deve ser positivo, o único cruzamento com o eixo imaginário é em $\omega = 0$ para o ganho $k = 5$. Sendo assim, $0 < k < 5$ é a faixa de valores para a qual o sistema em malha fechada é estável.
Outra forma

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9+k \\ s^2 & 5 & 5-k \\ s^1 & \frac{45+5k-5+k}{5} & \\ s^0 & 5-k & \end{array}$$

$$5 - k > 0 \Rightarrow k < 5,$$

$$\frac{45 + 5k - 5 + k}{5} > 0 \Rightarrow k > -20/3.$$

O intervalo para o qual o sistema é BIBO estável é $-20/3 < k < 5$. Como k deve ser positivo, então $0 < k < 5$. Substituindo $k = 5$ e $s = j\omega$ em $D(s)+kN(s) = 0$, tem-se que $\omega = 0$ (ponto de cruzamento com o eixo imaginário).



b) Calcule também os seguintes aspectos relacionados a esse sistema (1,0 ponto):

i) Ângulos de partida dos polos e ângulo de chegada ao zero, ou seja, determine $\phi_1(s \approx \lambda_1)$, $\phi_2(s \approx \lambda_2)$, $\phi_3(s \approx \lambda_3)$ e $\varphi_1(s \approx \gamma_1)$.
Obs.: Para efeito de cálculos, considere $\arctan(1) = 45^o$, $\arctan(2) = 60^o$, $\arctan(3) = 70^o$.

Solução:

$$\phi_1(s \approx \lambda_1) = \pi - \phi_2(s \approx \lambda_1) - \phi_3(s \approx \lambda_1) + \varphi_1(s \approx \lambda_1) = 180^o + 180^o = 360^o = 0^o.$$

$$\phi_2(s \approx \lambda_2) = \pi - \phi_1(s \approx \lambda_2) - \phi_3(s \approx \lambda_2) + \varphi_1(s \approx \lambda_2) = 180^o - (90 + \arctan(1)) - 90^o + (90^o + \arctan(3)) \approx 115^o$$

$$\phi_3(s \approx \lambda_3) = -\phi_2(s \approx \lambda_2) \approx -115^o$$

$$\varphi_1(s \approx \gamma_1) = \phi_1(s \approx \gamma_1) + \phi_2(s \approx \gamma_1) + \phi_3(s \approx \gamma_1) = 0^o.$$

ii) A sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro k, calculada para $k = 2$.

Solução: A função de transferência em malha fechada é

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + kH(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + kN(s)} = \frac{s - 1}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5 + ks - k},$$

portanto o ganho DC em malha fechada é

$$G(0) = \frac{-1}{5-k} = \frac{1}{k-5}.$$

A sensibilidade pode ser calculada por

$$\frac{\partial G(0)}{\partial k} \cdot \frac{k}{G(0)} = \frac{-1}{(k-5)^{\cancel{2}}} k \cancel{(k-5)} = \frac{k}{5-k}.$$

Para $k = 2$ a sensibilidade seria $2/3 = 66,67\%$.