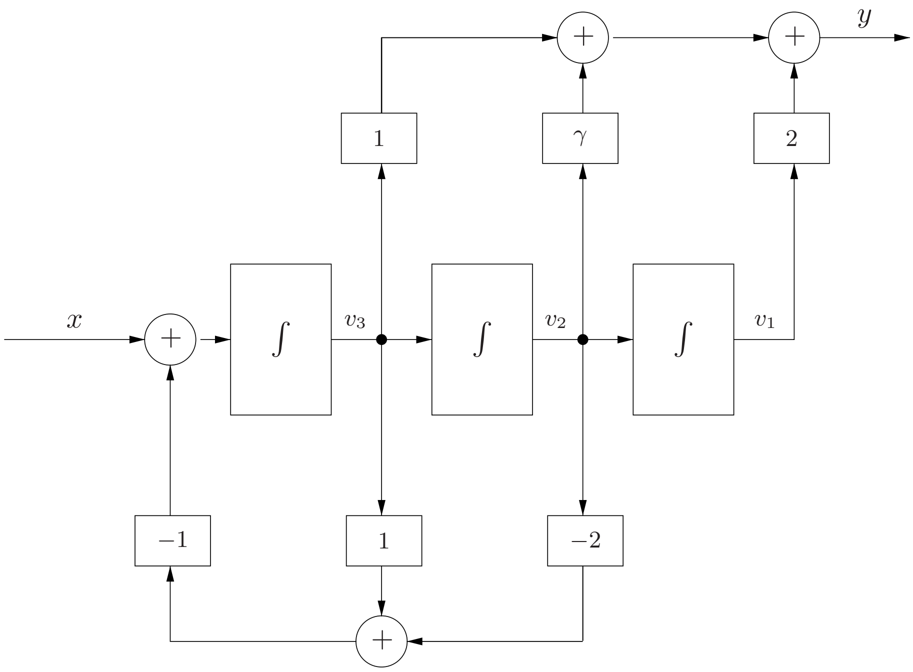
Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1ª Questão: Considere o sistema representado pelo seguinte diagrama de blocos (1,0 ponto)



1	
2	
3	
4	
5	

a) O sistema é controlável? Justifique.

b) Determine os valores de γ para os quais o sistema é não observável.

2ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} v(t).$$

a) Determine uma transformação P que produza uma representação $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ do sistema na forma canônica e evidencie os modos **controláveis** e **não-controláveis** (1,0 ponto).

b) Considerando os critérios de estabilidade estudados em aula, responda (1,0 ponto):

i) O sistema é BIBO estável? Justifique sua resposta.

ii) O sistema é assintoticamente estável? Justifique sua resposta.

3ª Questão: Considere o sistema linear autônomo descrito pela equação dinâmica

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2-\gamma \end{bmatrix} v(t).$$

a) Determine (justificando sua resposta) qual é a faixa de valores de γ para a qual o sistema é classificado como (1,0 ponto)

i) instável;

ii) marginalmente estável.

b) Determine a matriz P solução da equação de Lyapunov (indicando a matriz Q utilizada) associada ao sistema dado no enunciado dessa questão com $\gamma = 4$. Em função da solução encontrada, classifique o sistema (**justificando sua resposta**) como assintoticamente estável ou não (1,0 ponto).

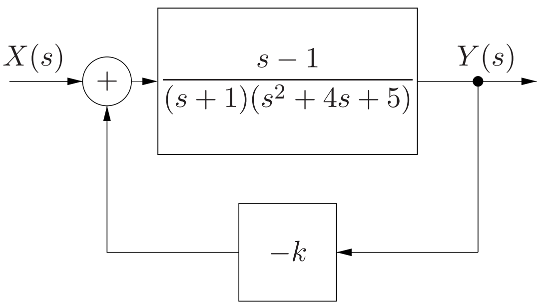
4ª Questão: Considere o sistema linear descrito pela seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{3s^3 + (10-k)s^2 + ks + 3}$$

a) Determine o intervalo do parâmetro k para o qual o sistema seja BIBO estável (1,0 ponto).

b) Considere $k = 10$. Usando a tabela de Routh determine o número de polos de $H(s)$ com parte real positiva (1,0 ponto).

5ª Questão: Considere o sistema em malha fechada descrito pelo seguinte diagrama de blocos

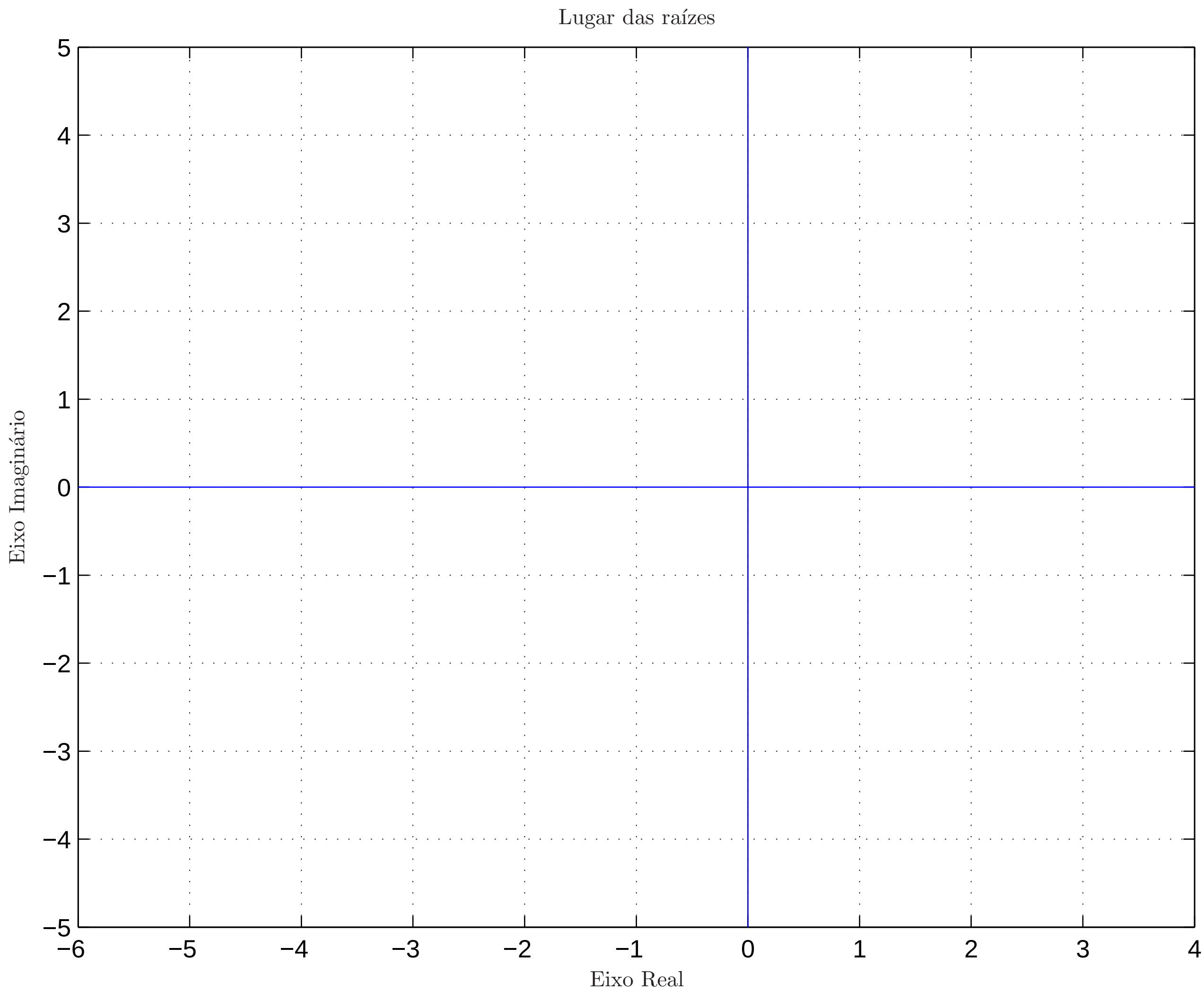


cuja função de transferência em malha aberta tem polos em $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2 + j$, $\lambda_3 = -2 - j$ e zero em $\gamma_1 = 1$.

a)Esboce o lugar das raízes para o sistema realimentado considerando, em especial, os seguintes aspectos:

i) Assíntotas: ângulo e ponto de encontro (1,0 ponto);

ii) Cruzamento com o eixo imaginário ($\omega > 0$) e a faixa de valores de $k > 0$ para os quais o sistema em malha fechada é estável (1,0 ponto).



b) Calcule também os seguintes aspectos relacionados a esse sistema (1,0 ponto):

i) Ângulos de partida dos polos e ângulo de chegada ao zero, ou seja, determine $\phi_1(s \approx \lambda_1)$, $\phi_2(s \approx \lambda_2)$, $\phi_3(s \approx \lambda_3)$ e $\varphi_1(s \approx \gamma_1)$.
Obs.: Para efeito de cálculos, considere $\arctan(1) = 45^o$, $\arctan(2) = 60^o$, $\arctan(3) = 70^o$.

ii) A sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro k, calculada para $k = 2$.

****

Consulta

****

Controlável se e somente se $rank\big(\text{Ctrb}(A, b)\big) = n$. **Observável** se e somente se $rank\big(\text{Obsv}(A, c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv \Rightarrow \bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{b} = Pb$, $\bar{c} = cP^{-1}$ e $\bar{d} = d$.
Se *rank* de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, P^{-1} é formada por r colunas LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI.
Se *rank* de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, P é formada por r linhas LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI.

Tabela de Routh para o polinômio $D(p) = \alpha_5 p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0$

p^5	α_5	α_3	α_1
p^4	α_4	α_2	α_0
p^3	$\beta_3 = \frac{(\alpha_4\alpha_3 - \alpha_2\alpha_5)}{\alpha_4}$	$\beta_1 = \frac{(\alpha_4\alpha_1 - \alpha_0\alpha_5)}{\alpha_4}$	
p^2	$\gamma_2 = \frac{(\alpha_2\beta_3 - \beta_1\alpha_4)}{\beta_3}$	$\gamma_0 = \alpha_0$	
p^1	$\delta_1 = \frac{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_0\beta_3)}{\gamma_2}$		
p^0	α_0		

- Se todos elementos da primeira coluna são positivos: todas raízes de $D(p)$ tem parte real negativa;
- A quantidade de trocas de sinal na primeira coluna corresponde a quantidade de raízes positivas;
- Se algum elemento da primeira coluna é 0 deve ser substituído por ε e os sinais dos elementos da primeira coluna serão avaliados para $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$. Se o número de trocas de sinal for igual para $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$ essa é a quantidade de raízes com parte real positiva, se for diferente, a diferença é o número de raízes com parte real nula.

Equação de Lyapunov para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo: Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a matriz P solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$ é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \;\Rightarrow\; D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$
sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s-\lambda_r|\Big) / \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s-\gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\displaystyle \frac{\pi(1+2r)}{m-\ell}$, $\beta_\ell > 0$, $r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$