Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	

1ª Questão: Considere o seguinte sistema de segunda ordem

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + 2\cos(y) = x.$$

Para o modelo não-linear na forma de variáveis de estado, com $v_1 = y$ e $v_2 = \dot{y}$:

a) Determine o ponto de equilíbrio $\bar{v} = (\bar{v}_1,\ \bar{v}_2)$ para $0 \leq y \leq \pi/2$ e $x = \bar{x} = 1$ (1,0 ponto).

Solução:

$$\bar{v} = (\bar{v}_1,\ \bar{v}_2) = (\pi/3,\ 0).$$

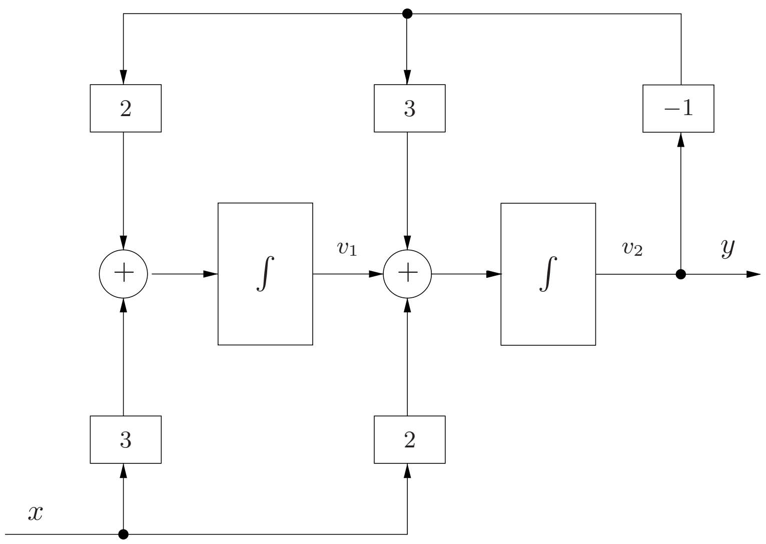
b) Determine uma representação em espaço de estados (A, b, c, d) linearizada em torno do ponto de equilíbrio $\bar{v}$ (calculado no item (a)) usando o jacobiano (1,0 ponto).

Solução:

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{3} & -\beta \end{bmatrix}, \qquad b = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad d = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} = 0$$

2ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) do sistema abaixo (1,0 ponto).



Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0.$$

3ª Questão: a) Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela seguinte equação diferencial (1,0 ponto)

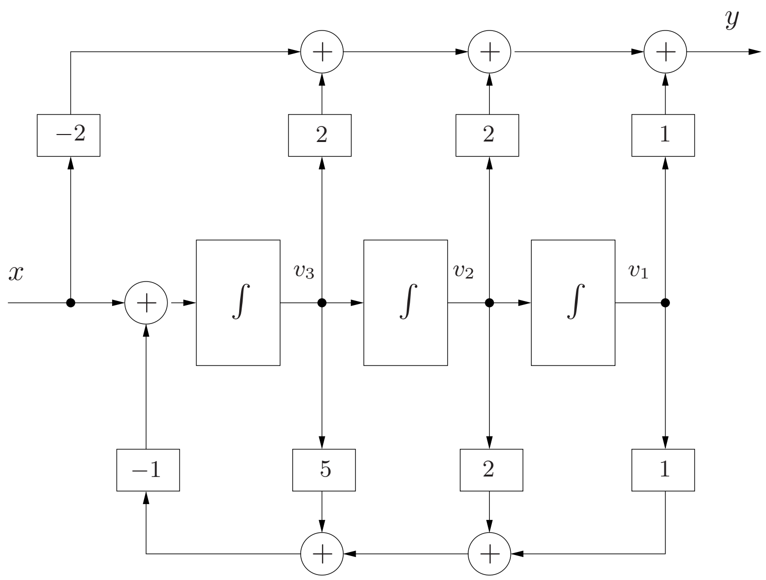
$$(p^3 + 5p^2 + 2p + 1)y(t) = (-2p^3 - 8p^2 - 2p - 1)x(t).$$

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad d = \beta_3 = -2$$

b) Complete o diagrama de blocos seguinte para que ele represente a equação diferencial do item (a) (1,0 ponto).



4ª Questão: a) Determine matrizes $\tilde{A}$, $\tilde{c}$ e uma condição inicial $\tilde{v}_0$ para produzir um sistema autônomo descrito por variáveis de estado:

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v}, \quad y = \tilde{c}\tilde{v}, \quad \tilde{v}(0) = \tilde{v}_0,$$

cuja saída seja igual a do sistema (1,0 ponto)

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v, \tag{1}$$

$$\text{com} \qquad x(t) = t\exp(-2t), \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Solução:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcule a função de transferência $H(s)$ do sistema descrito pela equação (1) do item (a) dessa questão (1,0 ponto).

Solução:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+4}{s^2+5s+6} = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}.$$

c) Determine a resposta completa $y(t)$ solução da equação de estados descrita por (1) para a entrada $x(t)$ e condição inicial v_0 dadas pela equação (2) do item (a) dessa questão (1,0 ponto).

Solução:

$$Y(s) = c(sI-A)^{-1}v_0 + (c(sI-A)^{-1}b+d)X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} + \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \left(\underbrace{3\exp(-2t) - 2\exp(-3t)}_{y_{en}(t)} + \underbrace{t^2\exp(-2t) - t\exp(-2t) + \exp(-2t) - \exp(-3t)}_{y_{cin}(t)} \right) u(t)$$

Em que $y_{en}(t)$ representa a saída para a **entrada nula** e $y_{cin}(t)$ representa a saída para **condições iniciais nulas**, sendo assim, a resposta completa é

$$\mathbf{y(t) = \left((4 - t + t^2)e^{-2t} - 3e^{-3t}\right) u(t)}.$$

5ª Questão: a) Determine a forma de Jordan da matriz (0,5 ponto)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{diag}(J_2(3), J_1(3)), \quad \text{pois} \quad M = (A-3I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \nu(M) = 2.$$

b) Determine uma matriz de transformação de similaridade Q que diagonalize a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, encontre Q não singular tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ seja diagonal (0,5 ponto).

Solução:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \begin{bmatrix} a & c \\ a & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Calcule $\exp(At)$ tal que a matriz A seja dada pelo item (b) dessa questão (1,0 ponto)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$\exp(At) = Q\exp(\hat{A}t)Q^{-1} \quad \text{ou} \quad \rho_0 I + \rho_1 A = 0,5 \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(t) & \text{senh}(t) \\ \text{senh}(t) & \cosh(t) \end{bmatrix}.$$