Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1ª Questão: Considere o seguinte sistema de segunda ordem

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + 2\cos(y) = x.$$

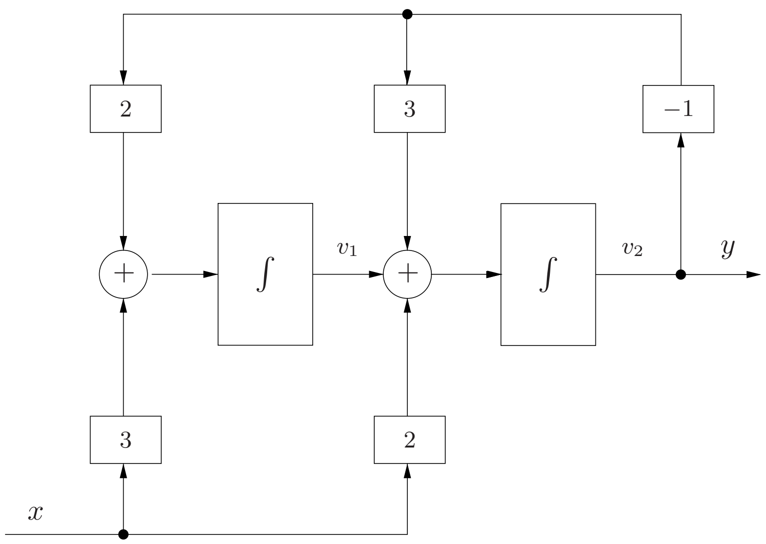
Para o modelo não-linear na forma de variáveis de estado, com $v_1 = y$ e $v_2 = \dot{y}$:

a) Determine o ponto de equilíbrio $\bar{v} = (\bar{v}_1,\ \bar{v}_2)$ para $0 \leq y \leq \pi/2$ e $x = \bar{x} = 1$ (1,0 ponto).

1	
2	
3	
4	
5	

b) Determine uma representação em espaço de estados (A, b, c, d) linearizada em torno do ponto de equilíbrio $\bar{v}$ (calculado no item (a)) usando o jacobiano (1,0 ponto).

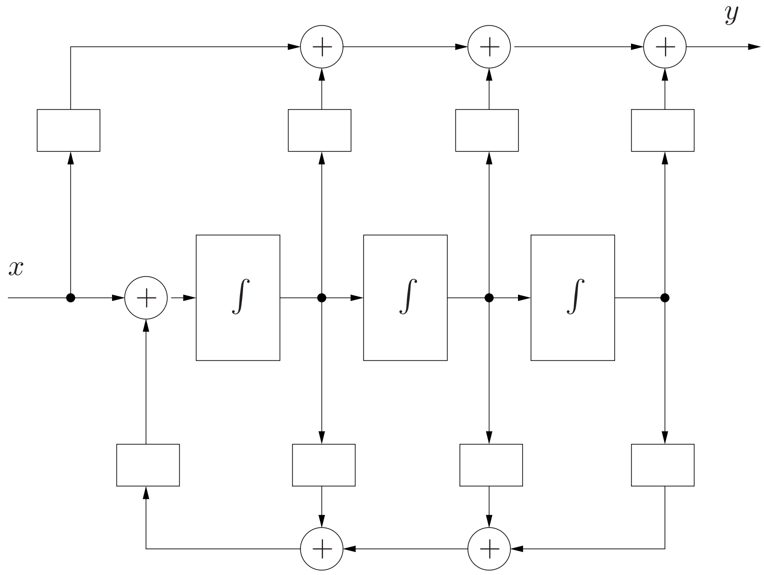
2ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) do sistema abaixo (1,0 ponto).



3ª Questão: a) Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela seguinte equação diferencial (1,0 ponto)

$$(p^3 + 5p^2 + 2p + 1)y(t) = (-2p^3 - 8p^2 - 2p - 1)x(t).$$

b) Complete o diagrama de blocos seguinte para que ele represente a equação diferencial do item (a) (1,0 ponto).



4ª Questão: a) Determine matrizes $\tilde{A}$, $\tilde{c}$ e uma condição inicial $\tilde{v}_0$ para produzir um sistema autônomo descrito por variáveis de estado:

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v}, \quad y = \tilde{c}\tilde{v}, \quad \tilde{v}(0) = \tilde{v}_0,$$

cuja saída seja igual a do sistema (1,0 ponto)

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v, \tag{1}$$

$$\text{com} \qquad x(t) = t\exp(-2t), \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

b) Calcule a função de transferência $H(s)$ do sistema descrito pela equação (1) do item (a) dessa questão (1,0 ponto).

c) Determine a resposta completa $y(t)$ solução da equação de estados descrita por (1) para a entrada $x(t)$ e condição inicial v_0 dadas pela equação (2) do item (a) dessa questão (1,0 ponto).

5ª Questão: a) Determine a forma de Jordan da matriz (0,5 ponto)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Determine uma matriz de transformação de similaridade Q que diagonalize a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, encontre Q não singular tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ seja diagonal (0,5 ponto).

c) Calcule $\exp(At)$ tal que a matriz A seja dada pelo item (b) dessa questão (1,0 ponto)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consulta

Laplace (funções causais): $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =cte.

Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \; b = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \; c = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \; d = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

Para Sistemas SISO $\Rightarrow$ $\dot{v} = Av + bx$, $y = cv + dx$, $\frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$

Transformação linear: $v = T\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT,\ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT$, T não singular. A representação entrada-saída é invariante com transformações de similaridade.

Representação em espaço de estados (A, b, c, d) na forma canônica:

$$D(p)y = N(p)x \Rightarrow (\sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k)y = (\sum_{k=0}^{m} \beta_k p^k)x, \quad \text{com } \alpha_m = 1, \quad \text{então:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \bar{\beta}_{m-1} \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} \beta_m \end{bmatrix},$$

com $\bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \alpha_k$.

Solução de equações de estado: $\dot{v} = Av + bx$, $y = cv + dx$, $v(0) = v_0$

$$\text{Por convolução: } y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t),$$

$$\text{Por Laplace: } Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s) \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$$

Por sistema homogêneo aumentado: encontrar x solução de $x = \bar{c}\bar{v}$, $\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}$, $\bar{v}(0) = v_0$, e:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{v}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}}_{\tilde{v}}, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix}}_{\tilde{c}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}}_{\tilde{v}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix}}_{\tilde{v}(0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{v}_0}.$$

Teorema de **Cayley-Hamilton**: $\Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I} - A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i \;,\; \Delta(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i \;,\; f\big(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1), \ldots, f(A_N)\big)$$

Procedimento para obtenção da **Forma de Jordan**

- Para cada λ com multiplicidade algébrica n_λ compute $M_\lambda = (A - \lambda I)$ e o espaço nulo de M_λ, ou seja, $r_\lambda = \nu(M_\lambda)$ = número de blocos de Jordan associados a λ;
- A dimensão do maior bloco é o menor k tal que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$;
- O número de blocos de dimensão i pode ser determinado por $2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$;
- A forma de Jordan $\hat{A}$ é uma matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan associados a cada autovalor.