Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado final no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal (condições iniciais nulas) descrito pela equação abaixo:

$$y[n+2] - 5y[n] = x[n+1] + 7x[n]$$

e determine
a) a função de transferência. (0,5 ponto)

Solução:

$$H(z) = \frac{z+7}{z^2-5}.$$

b) a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = -3 + 4(-3)^n$, usando o conceito de autofunção. (0,5 ponto)

Solução:

$$y_f[n] = -3H(1)(1)^n + 4H(-3)(-3)^n = -3\frac{8}{-4}(1)^n + 4\cdot\frac{4}{4}(-3)^n = 6 + 4(-3)^n.$$

2ª Questão: Considere a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{8z^2}{2z^2-3z+1} = \frac{8z^2}{(2z-1)(z-1)}, \qquad |z| > 1$$

e determine:
a) os valores de $x[1]$ e $x[2]$, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini. (0,5 ponto)

Solução:

$$\begin{array}{lllll|lll}
8z^2 & & & & & 2z^2 & -3z & +1 \\ \cline{6-8}
-8z^2 & +12z & -4 & & & 4 & +6z^{-1} & +7z^{-2} \\ \cline{1-3}
 & 12z & -4 & & & & & \\
 & -12z & +18 & -6z^{-1} & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 14 & -6z^{-1} & & & & \\
 & & -14 & +21z^{-1} & -7z^{-2} & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 15z^{-1} & -7z^{-2} & & &
\end{array}$$

$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots = 4 + 6z^{-1} + 7z^{-2} + \cdots$, assim, $x[1] = 6$, $x[2] = 7$.

b) os valores de $x[0]$ e $x[\infty]$ fazendo o uso das propriedades de valor inicial e final. (0,5 ponto)

Solução:

$$x[0] = \lim_{|z|\to+\infty} X(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{8z^2}{2z^2-3z+1} = \frac{8}{2-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$x[+\infty] = \lim_{z\to1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to1} \cancel{(z-1)}\frac{8z^2}{(2z-1)\cancel{(z-1)}} = \frac{8}{1} = 8.$$

3ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por (1,5 pontos)

$$X(z) = \frac{4z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)}, \qquad 0,5 < |z| < 1.$$

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{4}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-1}$$

$$A = \left(z - \frac{1}{2}\right)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=1/2} = \frac{4}{-1/2} = -8, \quad B = (z-1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{4}{1/2} = 8,$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{-8z}{z-\frac{1}{2}}}_{|z|>1/2} + \underbrace{\frac{8z}{z-1}}_{|z|<1}$$

$$x[n] = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 8u[-n-1]$$

4ª Questão: Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças (1,5 pontos)

$$y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = 16x[n] \qquad \Rightarrow \qquad (p-1)(p+3)y[n] = 16x[n]$$

Solução: Sabendo que para entrada degrau considera-se condições iniciais nulas e $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$, tem-se:

$$(z-1)(z+3)Y(z) = 16X(z)$$

$$(z-1)(z+3)Y(z) = \frac{16z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{16z}{(z-1)^2(z+3)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{16}{(z-1)^2(z+3)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+3}$$

$$16 = A(z+3) + B(z-1)(z+3) + C(z-1)^2$$

$$z = 1: \qquad 16 = 4A \Rightarrow A = \frac{16}{4} = 4$$

$$z = -3: \quad 16 = 16C \Rightarrow C = 1$$

$$z = 0: \quad 16 = 3A - 3B + C \Rightarrow 16 = 12 - 3B + 1 \Rightarrow B = \frac{3}{-3} = -1$$

$$Y(z) = 4\frac{z}{(z-1)^2} - 1\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+3}$$

$$y[n] = \left(4n - 1 + (-3)^n\right)u[n].$$

5ª Questão: Considere a entrada $x[n] = 8$ e determine para a equação a diferenças abaixo:

$$y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = x[n+1] \Rightarrow (p-1)(p+3)y[n] = px[n], \qquad y[0] = 0, \qquad y[1] = -2,$$

a) A parcela forçada da solução $y_f[n]$; (1,0 ponto)

Solução: a) $D(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. O que implica nas seguintes parcelas homogêneas:

$$y_h[n] = a_1(1)^n + a_2(-3)^n = a_1 + a_2(-3)^n$$

Por outro lado os modos forçados estão associados à entrada $x(t) = 12 = 12(1)^n$, ou seja, $\gamma_1 = 1$, que entra em ressonância com $\lambda_1 = 1$, produzindo a seguinte parcela forçada:

$$y_f[n] = bn(1)^n = bn.$$

Para calcular o coeficiente b, basta substituir a solução forçada na equação a diferenças original, ou seja:

$$b(n+2) + 2b(n+1) - 3bn = 8(1)^{n+1} \Rightarrow \cancel{bn} + 2b + \cancel{2bn} + 2b - \cancel{3bn} = 8 \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = 2.$$

Substituindo na fórmula da solução forçada:

$$y_f[n] = 2n(1)^n = 2n.$$

b) A solução completa $y[n] = y_h[n] + y_f[n]$; (1,0 ponto)

Solução: b)

$$y[n] = y_h[n] + y_f[n] = a_1 + a_2(-3)^n + 2n$$
$$y[0] = 0 = a_1 + a_2(-3)^0 + 2 \cdot 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2,$$
$$y[1] = -2 = a_1 + a_2(-3)^1 + 2 \cdot 1 = a_1 - 3a_2 + 2 \Rightarrow -2 - 2 = -4a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{-4}{-4} = 1 \Rightarrow a_1 = -1.$$
$$y[n] = y_h[n] + y_f[n] = -1 + (-3)^n + 2n.$$

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la. (0,5 ponto)

Solução: c)

$$\bar{D}(p) = p - \gamma_1 = p - 1,$$
$$\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0 \Rightarrow (p-1)^2(p+3)y[n] = 0$$

Como há apenas um modo forçado, é necessário calcular mais uma condição inicial, ou seja, $y[2]$ por substituição na equação a diferenças original. Fazendo $n = 0$, tem-se:

$$y[2] + 2y[1] - 3\cancel{y[0]} = x[1] = 8$$
$$y[2] = -2(-2) + 8 = 12$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 3$ (0,5 ponto)

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -3v_1 + x\\ \dot{v}_2 &= v_1 + v_1 v_2\end{aligned}$$

Solução: a)

$$\begin{cases} -3v_1 + 3 = 0 \Rightarrow v_1 = \dfrac{-3}{-3} = 1 \\ v_1 + v_1 v_2 = 0 \Rightarrow 1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -1 \Rightarrow (1, -1) \end{cases}$$

b)Determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tal que, em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \qquad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear (1,0 ponto).

Solução: b)

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{v}_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \dot{v}_1}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial \dot{v}_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \dot{v}_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 + v_2 & v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{v}_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \dot{v}_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é instável, pois possui um autovalor ($\lambda_2 = 1$) com parte real positiva!

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial (1,0 ponto)

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = \dddot{x} + 7\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x.$$

Solução:

$$D(p)y = N(p)x \Rightarrow (p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0)y = (\beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0)x$$

$$(p^3 + 3p^2 - 2p + 5)y = (p^3 + 7p^2 - 5p + 4)x$$

$$\alpha_2 = 3, \quad \alpha_1 = -2, \quad \alpha_0 = 5,$$

$$\beta_3 = 1, \quad \beta_2 = 7, \quad \beta_1 = -5, \quad \beta_0 = 4,$$

$$\bar{\beta}_2 = \beta_2 - \beta_3\alpha_2 = 7 - 1 \cdot 3 = 4,$$

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 - \beta_3\alpha_1 = -5 - 1 \cdot (-2) = -3,$$

$$\bar{\beta}_0 = \beta_0 - \beta_3\alpha_0 = 4 - 1 \cdot 5 = -1.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$