Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado final no espaço apropriado.

1ª Questão: a) Calcule a função de transferência $H(s)$ da entrada $x(t)$ para a saída $y(t)$ do sistema linear invariante no tempo causal (condições iniciais nulas) descrito pela seguinte equação diferencial (0,5 ponto)

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{x}(t) + 2x(t).$$

Solução:

$$H(s) = \frac{2s+2}{s^2+6s+9} = \frac{2s+2}{(s+3)^2}.$$

1	
2	
3	
4	
5	

b) Usando o conceito de auto-função, determine a solução forçada $y_f(t)$ para a entrada $x(t) = 9 - 4\exp(t)$ (0,5 ponto).

Solução:

$$y_f(t) = 9H(0) - 4H(1)\exp(t) = 9 \cdot \frac{2}{9} - 4 \cdot \frac{4}{16}\exp(t) = 2 - \exp(t).$$

c) Determine o valor da integral $\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt$. (0,5 ponto).

Solução:
Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0)$, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt = -\left.\frac{d}{ds}H(s)\right|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2s+2}{s^2+6s+9}\right)$$
$$= -\left.\frac{2(s^2+6s+9)-(2s+6)(2s+2)}{(s+3)^4}\right|_{s=0} = -\frac{6}{81} = -\frac{2}{27}.$$

d) Determine o valor inicial $y(0^+)$ e o valor final $y(+\infty)$ da resposta ao degrau fazendo o uso das propriedades de valor inicial e final (0,5 ponto).

Solução:

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{H(s)}{s} = \lim_{s\to\infty}\frac{2s+2}{(s+3)^2} = \lim_{s\to\infty}\frac{2/s+2/s^2}{1+6/s+9/s^2} = 0,$$
$$y(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{H(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{2s+2}{(s+3)^2} = \frac{2}{9}.$$

e) Determine a saída persistente (resposta em regime permanente $y_{reg}(t)$) para a entrada rampa ($x(t) = tu(t)$, condições iniciais nulas) para esse sistema (0,5 ponto).

Solução:

$$y_{reg}(t) = H(0)t + \dot{H}(0) = \left(\frac{2}{9}t + \frac{2}{27}\right)u(t).$$

$2^{\underline{a}}$ Questão: Utilizando a transformada unilateral de Laplace, determine $y(t)$ para a seguinte equação diferencial não-homogênea: (1,25 pontos)

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 3x(t), \qquad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \qquad x(t) = (2\exp(-t))u(t), \quad x(0) = 2.$$

Solução: Sabendo que $X(s) = \dfrac{2}{s+1}$ e $x(0) = 2\exp(0) = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + sY(s) - y(0) &= 2sX(s) - 2x(0) + 3X(s) \\
(s^2 + s)Y(s) &= (2s+3)X(s) + sy(0) + \dot{y}(0) + y(0) - 2x(0) \\
Y(s) &= \underbrace{\frac{(2s+3)}{s(s+1)}X(s)}_{Y_{ci}} + \underbrace{\frac{1}{s(s+1)}}_{Y_{en}} - \underbrace{\frac{4}{s(s+1)}}_{Y_{x0}} \\
Y(s) &= \frac{4s+6}{s(s+1)^2} - \frac{3}{s(s+1)} = \frac{4s+6-3s-3}{s(s+1)^2} \\
Y(s) &= \frac{s+3}{s(s+1)^2} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{(s+1)^2} + C\frac{1}{(s+1)} \\
s+3 &= A(s^2+2s+1) + Bs + C(s^2+s) \\
s^2: &\quad A + C = 0 \Rightarrow C = -A \\
s^1: &\quad 2A + B + C = 1 \Rightarrow B + A = 1 \Rightarrow B = 1 - A \\
s^0: &\quad A = 3 \Rightarrow B = -2 \Rightarrow C = -3 \\
Y(s) &= \frac{3}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{3}{(s+1)} \\
y(t) &= (3 - 2t\exp(-t) - 3\exp(-t))\,u(t).
\end{aligned}$$

$3^{\underline{a}}$ Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para (1,25 ponto)

$$X(s) = \frac{s+9}{(s-3)(s+1)}, \qquad -1 < \mathrm{Re}(s) < 3.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s+9}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B}{s+1} \\
A = (s-3)X(s)|_{s=3} &= \frac{12}{4} = 3, \quad B = (s+1)X(s)|_{s=-1} = \frac{8}{-4} = -2, \\
X(s) = X_1(s) + X_2(s) &= \underbrace{\frac{3}{(s-3)}}_{\mathrm{Re(s)}<3} - \underbrace{\frac{2}{s+1}}_{\mathrm{Re}(s)>-1} \\
Y_1(s) = X_1(-s) &= \frac{3}{-s-3} = \frac{-3}{s+3}, \qquad \mathrm{Re}(-s) < 3 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) > -3 \\
y_1(t) = -3\exp(-3t)u(t) &\Rightarrow x_1(t) = y_1(-t) = -3\exp(3t)u(-t) \\
x_2(t) &= -2\exp(-t)u(t) \\
x(t) = x_1(t) + x_2(t) &= -3\exp(3t)u(-t) - 2\exp(-t)u(t)
\end{aligned}$$

$4^{\underline{a}}$ Questão: Determine para a equação diferencial abaixo:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 6, \qquad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -4$$

a) A parcela forçada da solução $y_f(t)$; (1,0 ponto)

Solução: a) $D(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$. O que implica nas seguintes parcelas homogêneas:

$$y_h(t) = a_1 \exp(0 \cdot t) + a_2 \exp(-3t) = a_1 + a_2 \exp(-3t)$$

Por outro lado os modos forçados estão associados à entrada $x(t) = 6 = 6\exp(0t)$, ou seja, $\gamma_1 = 0$, que entra em ressonância com $\lambda_1 = 0$, produzindo a seguinte parcela forçada:

$$y_f(t) = b_1 t \exp(0t) = b_1 t.$$

Para calcular o coeficiente b_1, basta substituir a solução forçada na equação diferencial original, ou seja, precisamos calcular as derivadas de $y_f(t)$:

$$\dot{y}_f(t) = b_1, \qquad \ddot{y}_f(t) = 0.$$

Substituindo na equação diferencial original:

$$\begin{gathered}\ddot{y}_f(t) + 3\dot{y}_f(t) = 6 \Rightarrow 3b_1 = 6 \Rightarrow b_1 = 2,\\ y_f(t) = 2t.\end{gathered}$$

b) A solução completa $y(t) = y_h(t) + y_f(t)$; (1,0 ponto)

Solução: b)

$$\begin{gathered}y(t) = y_h(t) + y_f(t) = a_1 + a_2 \exp(-3t) + 2t\\ y(0) = 1 = a_1 + a_2 \exp(-3 \cdot 0) + 2 \cdot 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1 - a_2,\\ \dot{y}(0) = -4 = -3a_2 \exp(-3 \cdot 0) + 2 \Rightarrow -3a_2 = -6 \Rightarrow a_2 = 2 \Rightarrow a_1 = -1.\\ y(t) = -1 + 2\exp(-3t) + 2t.\end{gathered}$$

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la. (0,5 ponto)

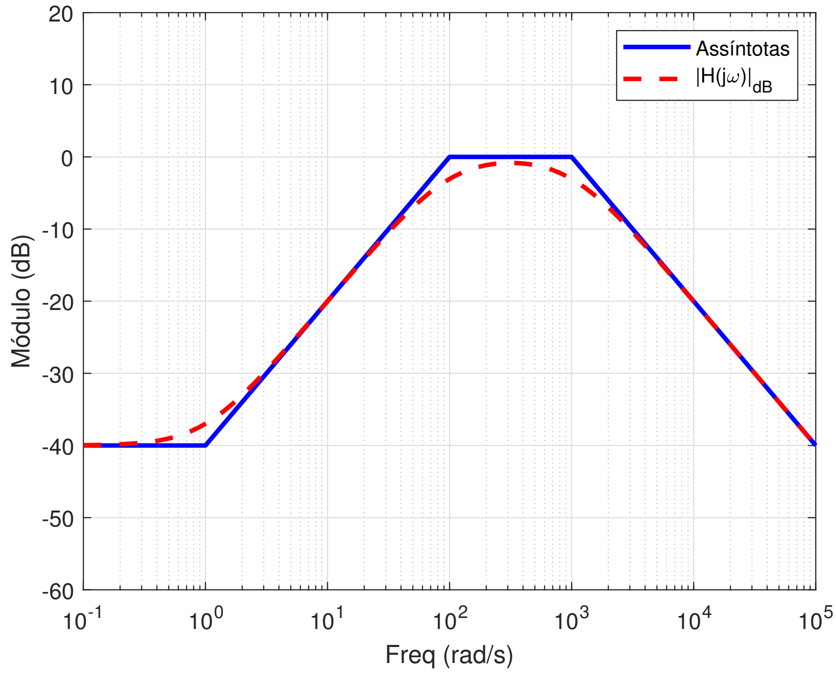
Solução: c)

$$\begin{gathered}\bar{D}(p) = p - \gamma_1 = p - 0 = p,\\ \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0 \Rightarrow p^2(p + 3)y(t) = 0\end{gathered}$$

Como há apenas um modo forçado, é necessário calcular mais uma condição inicial, ou seja, $\ddot{y}(0)$ por substituição na equação diferencial original:

$$\begin{gathered}\ddot{y}(0) + 3\dot{y}(0) = 6\\ \ddot{y}(0) = -3\dot{y}(0) + 6 = -3(-4) + 6 = 12 + 6 = 18\end{gathered}$$

5ª Questão: a) Determine a função de transferência racional $H(s)$ para o sistema de fase mínima cujo módulo da resposta em frequência é dado pelo diagrama abaixo (1,0 ponto)

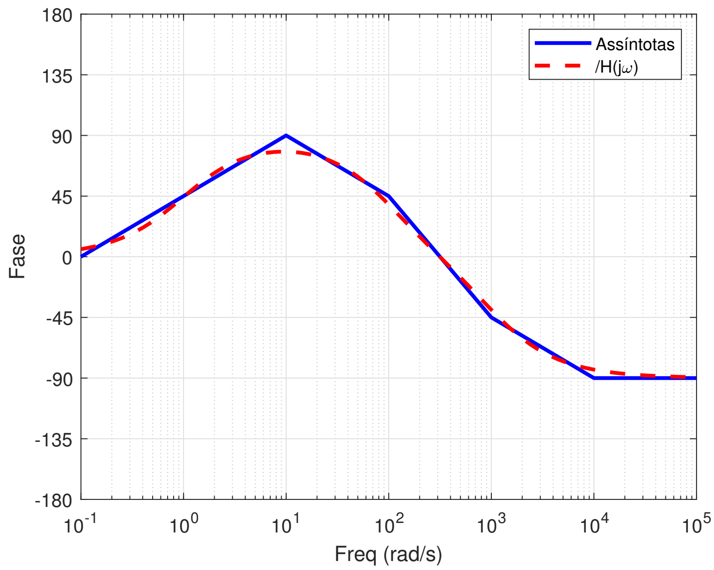


Solução:

$$H(s) = \frac{1}{100} \cdot (s+1) \cdot \frac{100}{s+100} \cdot \frac{1000}{s+1000} = \frac{1000(s+1)}{(s+100)(s+1000)}.$$

b) Esboce o diagrama de Bode assintótico de fase do sistema descrito pela função de transferência obtido no item anterior (1,0 ponto)

Solução:



c) A partir dos diagramas de módulo e fase obtenha a solução forçada para uma entrada $x(t) = 10\cos(t)$ (0,5 ponto)

Solução:

Em $\omega = 1$rad/s a fase é $\angle H(j1) = 45^o$ e o módulo é -40dB, o que equivale a $20 \log |H(j1)| = -40 \Rightarrow |H(j1)| = 10^{-2}$. Assim $y_f(t) = |H(j1)| \cdot 10\cos(t + \angle H(j1)) = 0.1\cos(t + 45^o)$.