Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Considere o sistema causal descrito por

$$(p^2 + 2p + 1)y(t) = (p + 1)x, \quad y(0) = 2, \; \dot{y}(0) = 3, \quad x(t) = 2\exp(-2t)u(t).$$

Determine a solução da equação acima calculando $y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\}$ (1,0 ponto).

Solução:

$$Y(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+1}$$
$$y(t) = (-2\exp(-2t) + (3t + 4)\exp(-t))u(t).$$

2ª Questão:

a) Determine a solução forçada de $(p+1)(p-3)y = (p-1)x$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 3$, para $x(t) = 2\exp(3t)$ pelo método dos coeficientes a determinar (0,5 ponto).

Solução:

$$y_F(t) = t\exp(3t),$$

b) Determine a **equação diferencial homogênea** a coeficientes constantes ($\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$) e as **condições iniciais** que produzem a mesma solução que a equação diferencial não-homogênea (0,5 ponto):

$$(p^2 + 1)y(t) = cos(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Solução:

$$\bar{D}(p)D(p)y(t) = (p^2 + 1)^2 y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 1, \quad \dddot{y}(0) = 0.$$

3ª Questão: Determine a resposta $y[n]$ ao degrau $x[n] = u[n]$ para o sistema discreto dado pela seguinte equação a diferenças (1,0 ponto):

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = 3x[n+1] + 4x[n].$$

Solução:

$$Y(z) = \frac{2}{3}\frac{z}{(z+2)^2} - \frac{7}{9}\frac{z}{z+2} + \frac{7}{9}\frac{z}{z-1},$$
$$y[n] = \left(-\frac{1}{3}n(-2)^n - \frac{7}{9}(-2)^n + \frac{7}{9}\right)u[n].$$

4ª Questão: Seja a seguinte equação que descreve o comportamento de um pêndulo simples

$$m\ell\ddot{y} = -mg\text{sen}(y) - mb\dot{y}.$$

Considere as variáveis de estado com $v_1 = y$ e $v_2 = \dot{y}$ e determine uma representação em espaço de estados (A, b, c, d) linearizada em torno do ponto de equilíbrio $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ para $0 \leq y \leq \pi/2$ usando o jacobiano (1,0 ponto).

Solução:

$$\bar{v} = (0, 0), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{\ell} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; d = 0.$$

5ª Questão: Determine a **solução** $y(t) = c\exp(At)v_0$ para o sistema autônomo (1,0 ponto)

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} v(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} v(t), \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obs.: Utilize Cayley-Hamilton para o cálculo de $\exp(At)$.

Solução:

$$\exp(At) = \rho_0 I + \rho_1 A = \cos(2t)I + 0.5\text{sen}(2t)A, \quad y(t) = c\exp(At)v_0 = \cos(2t) - \text{sen}(2t).$$

6ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) com matrizes reais na forma de equação de estados dado por

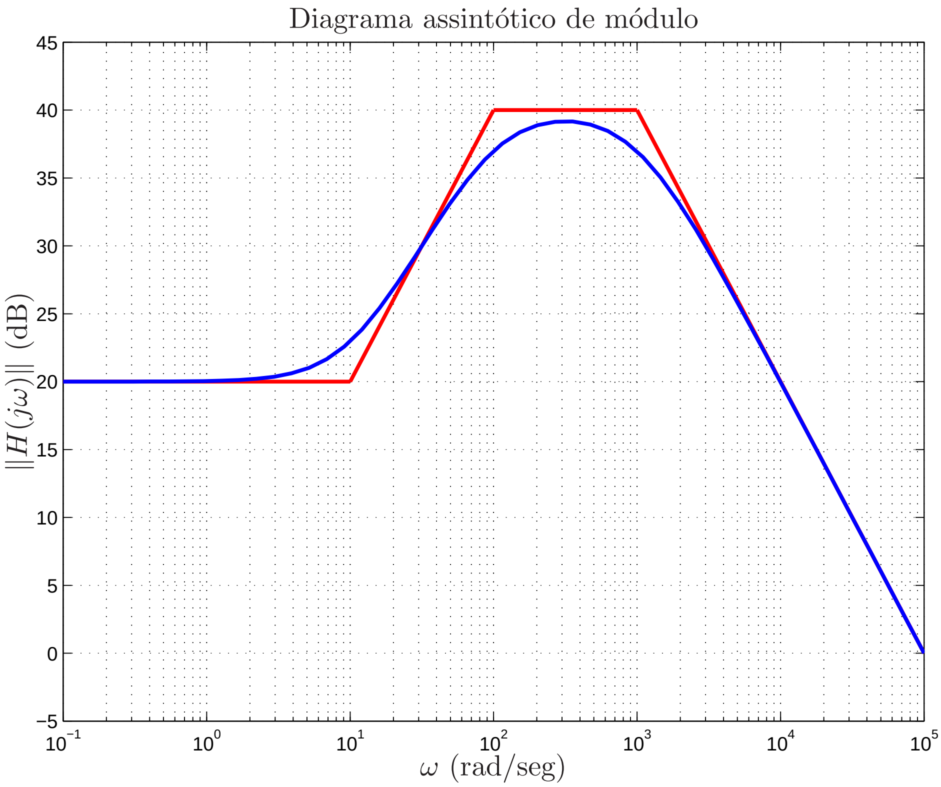
$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \quad y = \bar{c}\bar{v},$$

que produza como saída $y(t) = (t + 1)\exp(2t)$ (1,0 ponto).

Solução: Uma opção possível é a seguinte:

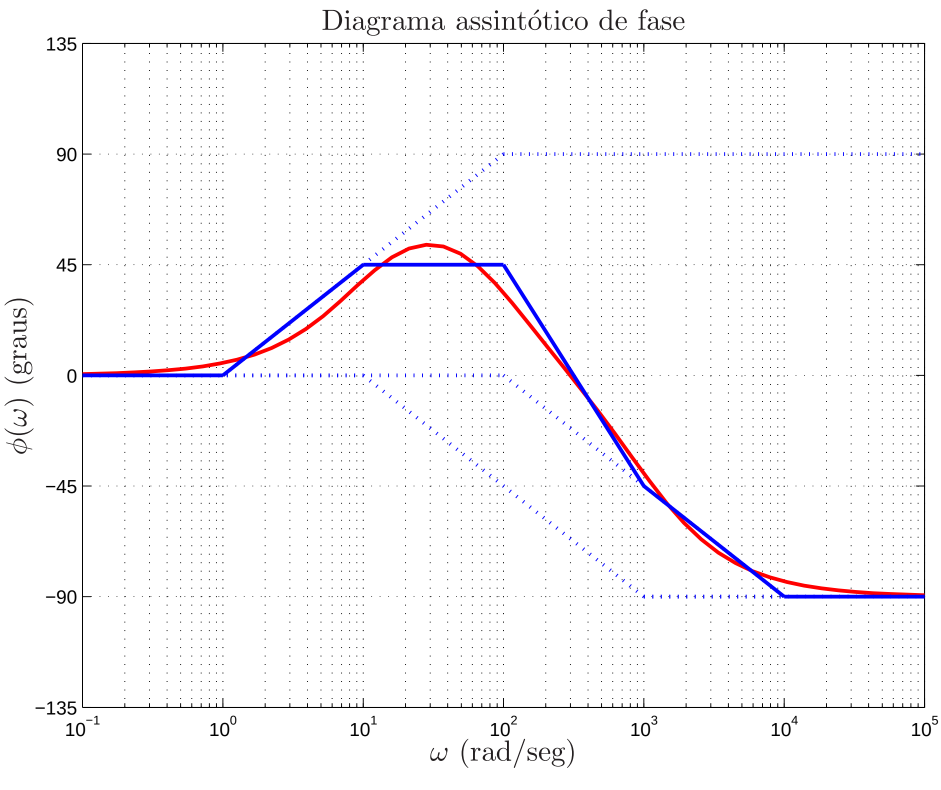
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7ª Questão: Determine a **função de transferência** racional ($H(s)$) e esboce o **diagrama assintótico de fase** do sistema de fase mínima cujo módulo da resposta em frequência é dado pelo diagrama abaixo (1,0 ponto)

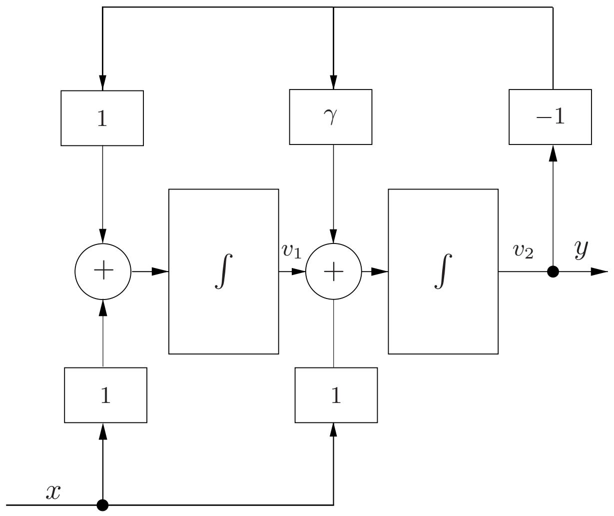


Solução:

$$H(s) = 10 \cdot \frac{s+10}{10} \cdot \frac{100}{s+100} \cdot \frac{1000}{s+1000} = \frac{10^5(s+10)}{(s+10^2)(s+10^3)}.$$



8ª Questão: Determine (**justificando sua resposta**) para qual faixa de valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ o sistema da figura abaixo pode ser classificado como:



a) Observável (0,5 ponto);

Solução: Qualquer $\gamma \in \mathbb{R}$, pois o sistema está na forma canônica observável: $\det(\text{Obsv}(A, c)) \neq 0$.

b) Controlável (0,5 ponto).

Solução: Se $\gamma \neq 2$ então $\det(\text{Ctrb}(A, b)) \neq 0$ e, portanto, o sistema é controlável.

9ª Questão: Considere o sistema linear autônomo descrito pela equação dinâmica

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} v.$$

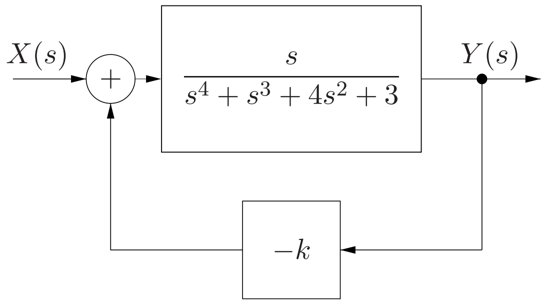
Determine (**justificando sua resposta**) para qual faixa de valores de γ o sistema pode ser classificado como
a) marginalmente estável (0,5 ponto);

Solução: $\gamma > 1$, pois nesse caso a matriz A teria um autovalor com parte real negativa e outro com parte real nula associado a um bloco de Jordan de dimensão 1.

b) instável (0,5 ponto).

Solução: $\gamma \leq 1$, pois nesse caso a matriz A teria ou dois autovalores com parte real nula associados a um único bloco de Jordan de dimensão 2, ou teria pelo menos um autovalor com parte real positiva.

10ª Questão: Considere o sistema em malha fechada descrito pelo seguinte diagrama de blocos



cuja função de transferência em malha aberta tem polos em $\lambda_1 \approx -0.65 + j1.77$, $\lambda_2 \approx -0.65 - j1.77$, $\lambda_3 \approx 0.15 + j0.90$, $\lambda_4 \approx 0.15 - j0.90$ e zero em $\gamma_1 = 0$.

a) Determine o intervalo de k tal que o sistema em malha fechada seja BIBO estável. Dica: Utilize a tabela de Routh (0,5 ponto).

Solução: $1 < k < 3$

b) Esboce no gráfico abaixo: as raízes do sistema em malha aberta (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 e γ_1) e as assíntotas do lugar das raízes do sistema em malha fechada considerando o ângulo das assíntotas e ponto de encontro das assíntotas no eixo real (0,5 ponto).

Solução:
São três assíntotas com ângulos: $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, π, que se encontram em $-\frac{1}{3}$.