Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Considere o sistema causal descrito por

$$(p^2 + 2p + 1)y(t) = (p + 1)x, \quad y(0) = 2, \ \dot{y}(0) = 3, \quad x(t) = 2\exp(-2t)u(t).$$

Determine a solução da equação acima calculando $y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\}$ (1,0 ponto).

2ª Questão:

a) Determine a solução forçada de $(p+1)(p-3)y = (p-1)x$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 3$, para $x(t) = 2\exp(3t)$ pelo método dos coeficientes a determinar (0,5 ponto).

b) Determine a **equação diferencial homogênea** a coeficientes constantes ($\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$) e as **condições iniciais** que produzem a mesma solução que a equação diferencial não-homogênea (0,5 ponto):

$$(p^2 + 1)y(t) = cos(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

3ª Questão: Determine a resposta $y[n]$ ao degrau $x[n] = u[n]$ para o sistema discreto dado pela seguinte equação a diferenças (1,0 ponto):

$$y[n + 2] + 4y[n + 1] + 4y[n] = 3x[n + 1] + 4x[n].$$

4ª Questão: Seja a seguinte equação que descreve o comportamento de um pêndulo simples

$$m\ell\ddot{y} = -mg\text{sen}(y) - mb\dot{y}.$$

Considere as variáveis de estado com $v_1 = y$ e $v_2 = \dot{y}$ e determine uma representação em espaço de estados (A, b, c, d) linearizada em torno do ponto de equilíbrio $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ para $0 \leq y \leq \pi/2$ usando o jacobiano (1,0 ponto).

5ª Questão: Determine a **solução** $y(t) = c\exp(At)v_0$ para o sistema autônomo (1,0 ponto)

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} v(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} v(t), \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obs.: Utilize Cayley-Hamilton para o cálculo de $\exp(At)$.

6ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) com matrizes reais na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \quad y = \bar{c}\bar{v},$$

que produza como saída $y(t) = (t+1)\exp(2t)$ (1,0 ponto).

7ª Questão: Determine a **função de transferência** racional $(H(s))$ e esboce o **diagrama assintótico de fase** do sistema de fase mínima cujo módulo da resposta em frequência é dado pelo diagrama abaixo (1,0 ponto)

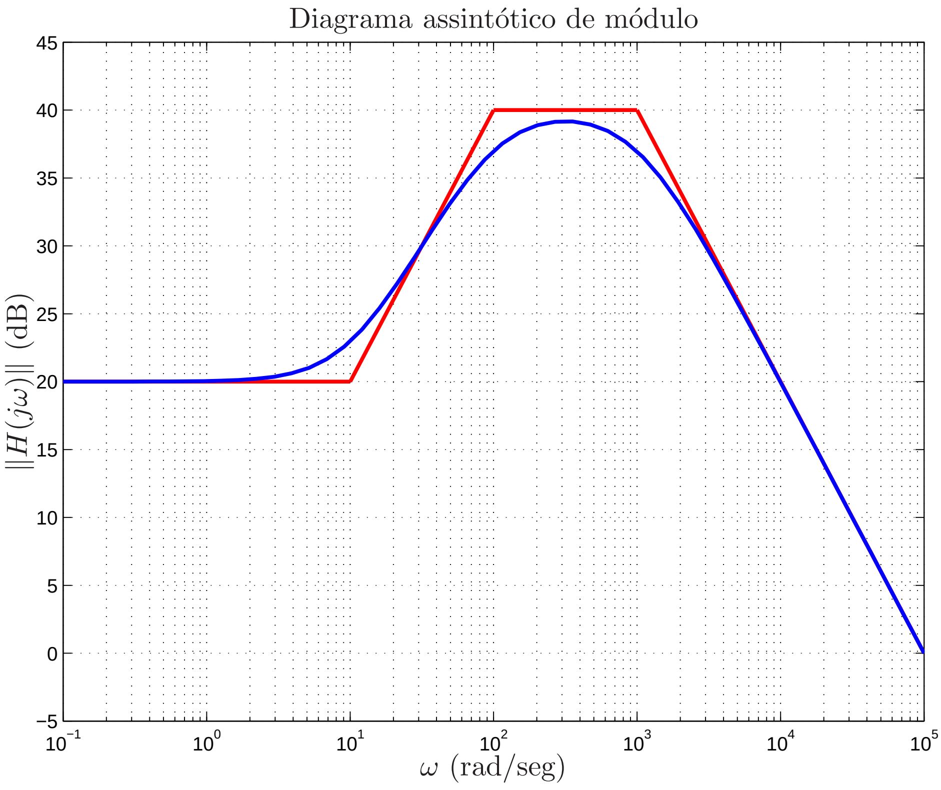


Diagrama assintótico de módulo
$\|H(j\omega)\|$ (dB)
ω (rad/seg)
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}

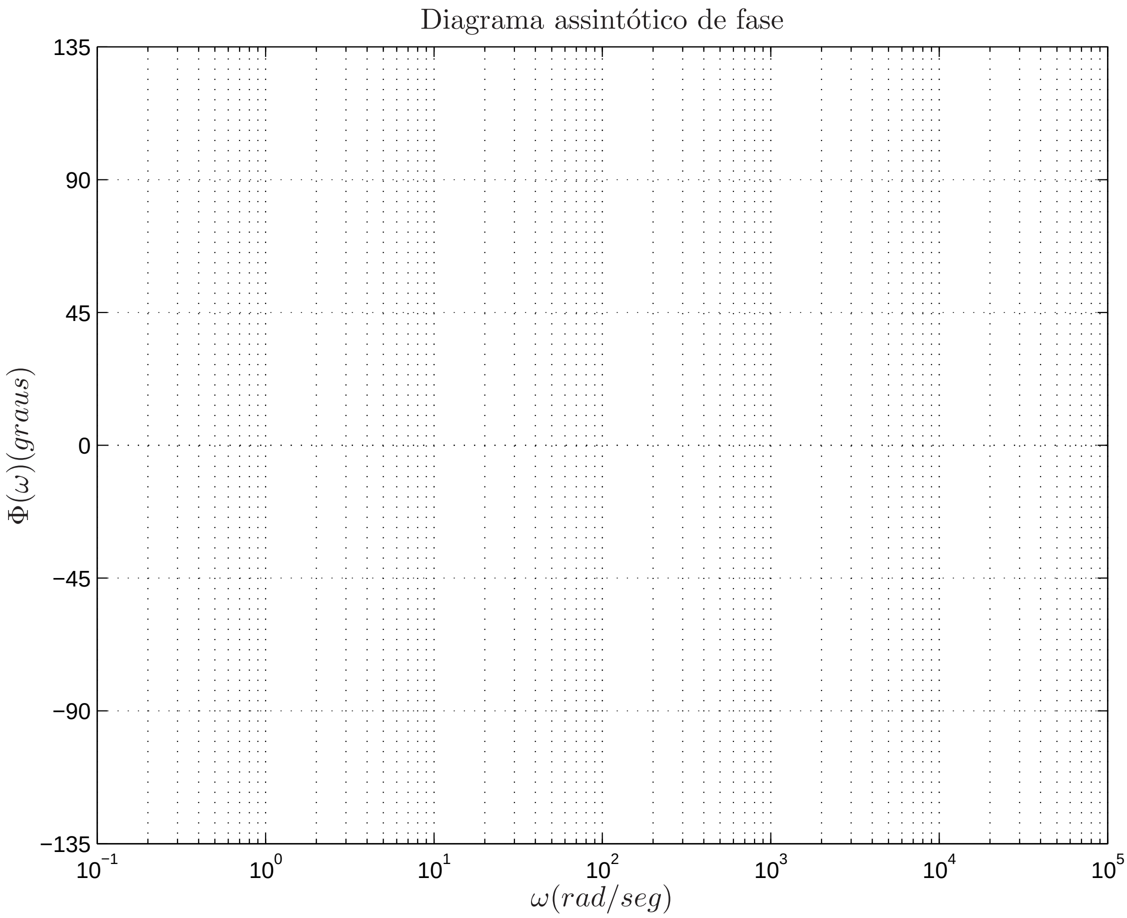
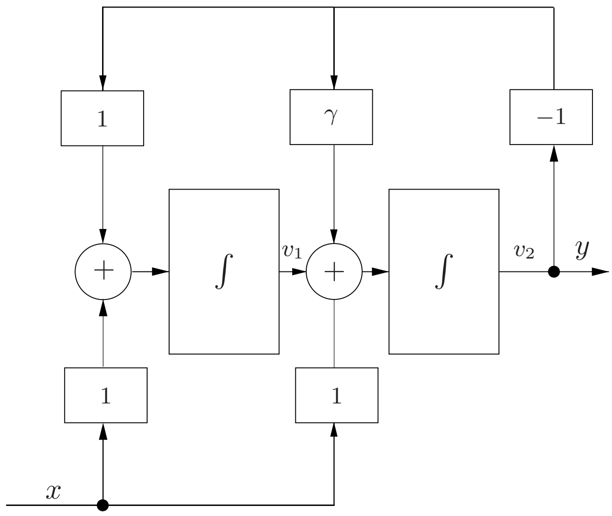


Diagrama assintótico de fase
$\Phi(\omega)(graus)$
$\omega(rad/seg)$
135
90
45
0
−45
−90
−135
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}

8ª Questão: Determine (**justificando sua resposta**) para qual faixa de valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ o sistema da figura abaixo pode ser classificado como:



a) Observável (0,5 ponto);

b) Controlável (0,5 ponto).

9ª Questão: Considere o sistema linear autônomo descrito pela equação dinâmica

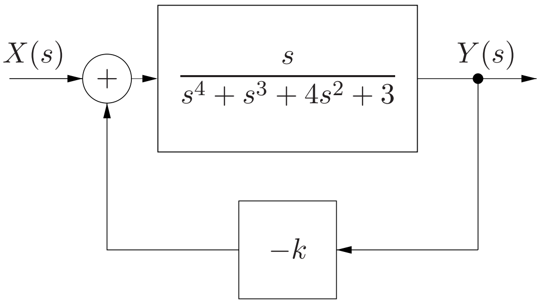
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} v.$$

Determine (**justificando sua resposta**) para qual faixa de valores de γ o sistema pode ser classificado como

a) marginalmente estável (0,5 ponto);

b) instável (0,5 ponto).

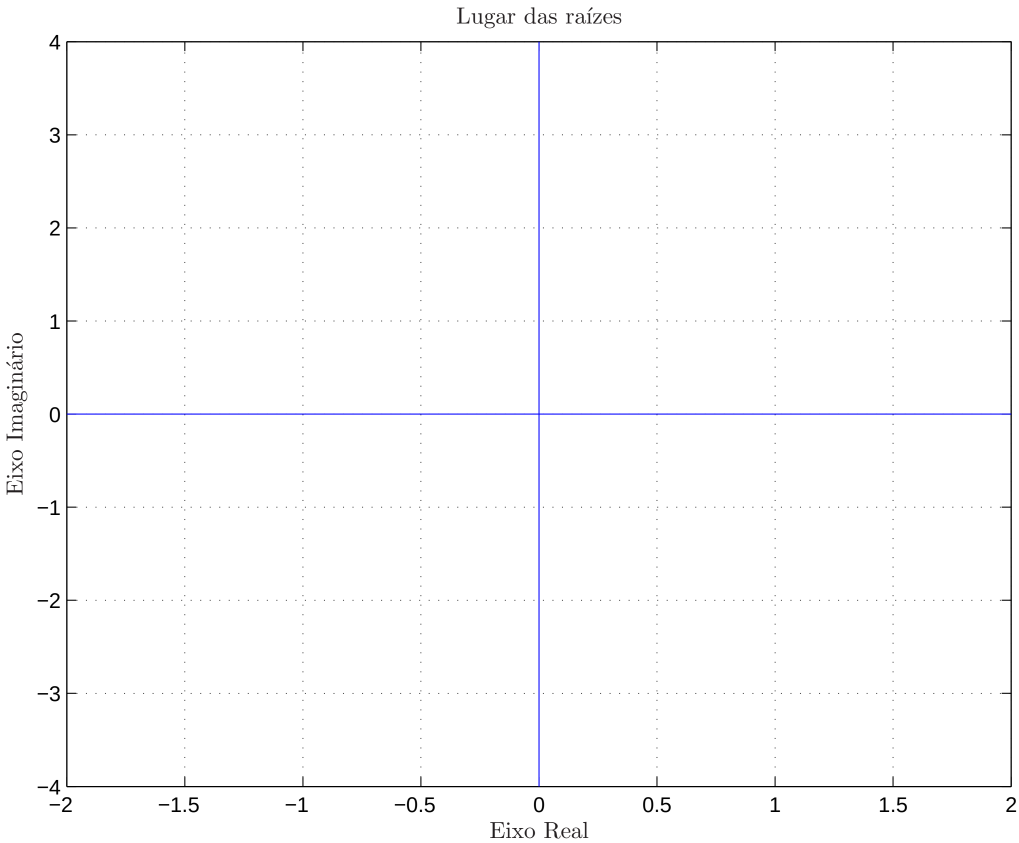
10ª Questão: Considere o sistema em malha fechada descrito pelo seguinte diagrama de blocos



cuja função de transferência em malha aberta tem polos em $\lambda_1 \approx -0.65 + j1.77$, $\lambda_2 \approx -0.65 - j1.77$, $\lambda_3 \approx 0.15 + j0.90$, $\lambda_4 \approx 0.15 - j0.90$ e zero em $\gamma_1 = 0$.

a) Determine o intervalo de k tal que o sistema em malha fechada seja BIBO estável. Dica: Utilize a tabela de Routh (0,5 ponto).

b) Esboce no gráfico abaixo: as raízes do sistema em malha aberta (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 e γ_1) e as assíntotas do lugar das raízes do sistema em malha fechada considerando o ângulo das assíntotas e ponto de encontro das assíntotas no eixo real (0,5 ponto).



Consulta

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad , \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \ \ \mathrm{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \ , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \ , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$, $\quad \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\big\{a^n u[n]\big\} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad \mathcal{Z}\big\{na^n u[n]\big\} = \frac{az}{(z-a)^2} \ , \ |z| > |a|$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t) \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \ \ , \ \text{se} \ \ \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

Resposta em Freqüência:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a freqüência em escala logarítmica.

$$M_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \ \ \text{sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\mathrm{dB}}(\omega) = M_{1\mathrm{dB}}(\omega) + M_{2\mathrm{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} =$cte.

Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ b = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ c = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ d = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

Para Sistemas SISO $\Rightarrow \quad \dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx \ , \ \dfrac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$

Solução de equações de estado: $\dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx, \ v(0) = v_0$

$$\text{Por convolução: } y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t),$$

$$\text{Por Laplace: } Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s) \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$$

Por sistema homogêneo aumentado: encontrar x solução de $x = \bar{c}\bar{v}$, $\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \ \bar{v}(0) = v_0$, e:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{v}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}}_{\tilde{v}}, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix}}_{\tilde{c}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}}_{\tilde{v}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix}}_{\tilde{v}(0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{v}_0}.$$

Teorema de **Cayley-Hamilton**: $\Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I} - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(A) = 0$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i \ , \ \Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i \ , \ f\big(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1), \ldots, f(A_N)\big)$$

Controlabilidade e Observabilidade:
Controlável se e somente se $rank\big(\mathrm{Ctrb}(A, b)\big) = n$. Observável se e somente se $rank\big(\mathrm{Obsv}(A, c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \mathrm{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Tabela de Routh para o polinômio $D(p) = \alpha_5 p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0$

p^5	α_5	α_3	α_1
p^4	α_4	α_2	α_0
p^3	$\beta_3 = \frac{(\alpha_4\alpha_3 - \alpha_2\alpha_5)}{\alpha_4}$	$\beta_1 = \frac{(\alpha_4\alpha_1 - \alpha_0\alpha_5)}{\alpha_4}$	
p^2	$\gamma_2 = \frac{(\alpha_2\beta_3 - \beta_1\alpha_4)}{\beta_3}$	$\gamma_0 = \alpha_0$	
p^1	$\delta_1 = \frac{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_0\beta_3)}{\gamma_2}$		
p^0	α_0		

- Se todos elementos da primeira coluna são positivos: todas raízes de $D(p)$ tem parte real negativa;
- A quantidade de trocas de sinal na primeira coluna corresponde a quantidade de raízes positivas;
- Se algum elemento da primeira coluna é 0 deve ser substituído por ε e os sinais dos elementos da primeira coluna serão avaliados para $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$. Se o número de trocas de sinal for igual para $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$ essa é a quantidade de raízes com parte real positiva, se for diferente, a diferença é o número de raízes com parte real nula.

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

Assíntotas:

- O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$;
- Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1+2r)}{m-\ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$;
- Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\dfrac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$.