Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado final no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal (condições iniciais nulas) descrito pela equação abaixo:

$$y[n+2] - 5y[n] = x[n+1] + 7x[n]$$

e determine
a) a função de transferência. (0,5 ponto)

b) a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = -3 + 4(-3)^n$, usando o conceito de autofunção. (0,5 ponto)

2ª Questão: Considere a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{8z^2}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{8z^2}{(2z-1)(z-1)}, \qquad |z| > 1$$

e determine:
a) os valores de $x[1]$ e $x[2]$, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini. (0,5 ponto)

b) os valores de $x[0]$ e $x[\infty]$ fazendo o uso das propriedades de valor inicial e final. (0,5 ponto)

3ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por (1,5 pontos)

$$X(z) = \frac{4z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)}, \qquad 0,5 < |z| < 1.$$

4ª Questão: Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças (1,5 pontos)

$$y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = 16x[n] \qquad \Rightarrow \qquad (p-1)(p+3)y[n] = 16x[n]$$

5ª Questão: Considere a entrada $x[n] = 8$ e determine para a equação a diferenças abaixo:

$$y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = x[n+1] \Rightarrow (p-1)(p+3)y[n] = px[n], \qquad y[0] = 0, \qquad y[1] = -2,$$

a) A parcela forçada da solução $y_f[n]$; (1,0 ponto)

b) A solução completa $y[n] = y_h[n] + y_f[n]$; (1,0 ponto)

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la. (0,5 ponto)

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 3$ (0,5 ponto)

$$\dot{v}_1 = -3v_1 + x$$
$$\dot{v}_2 = v_1 + v_1 v_2$$

b)Determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tal que, em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \qquad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear (1,0 ponto).

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial (1,0 ponto)

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = \dddot{x} + 7\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x.$$

Consulta

Degrau: $u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	**Impulso:** $\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$,	$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

Auto-função para SLIT:

$$x[n] = z^n \Rightarrow y_f[n] = H(z)z^n,$$

em que $H(z) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=z}$ é a função de transferência do SLIT descrito pela equação a diferenças: $D(p)y[n] = N(p)x[n]$ e p é o operador avanço, ou seja, $py[n] = y[n+1]$, $p^2 y[n] = y[n+2]$, …, $p^m y[n] = y[n+m]$

Definição da Transformada bilateral Z:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \cdots x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \quad z \in \Omega_x$$

Tabela de transformadas:			**Propriedades da transformada bilateral Z:**		
$\boldsymbol{x[n]}$	$\boldsymbol{X(z)}$	$\boldsymbol{z \in \Omega_x}$	$\boldsymbol{x[n]}$	$\boldsymbol{X(z)}$	$\boldsymbol{z \in \Omega_x}$
Impulso: $\delta[n]$	1	$z \in \mathbb{C}$	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$\Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
Degrau: $u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$\Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$n^m x[n]$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$	Ω_x
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$x[n-m]u[n-m]$	$z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$	Ω_x
$na^{n-1}u[n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$x[n+m]u[n]$	$z^m \mathcal{Z}\left(x[n]u[n] - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right)$	Ω_x
$-na^{n-1}u[-n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$z^{-1} \in \Omega_x$
$n^2 a^n u[n]$	$\frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	**Soma:** $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] = X(z)\rvert_{z=1}$ se $z = 1 \in \Omega_x$		
$\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	**Teorema do Valor inicial:** $x[0] = \lim_{\lvert z\rvert \to \infty} X(z)$, se Ω_x é o exterior de um círculo		
$\binom{n+m}{m} a^n u[n]$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	**Teorema do Valor final:** $x[+\infty] = \lim_{z \to 1}(z-1) \cdot X(z)$, $\lvert z\rvert > \rho$, $0 < \rho \leq 1$		

Eq. dif. (Transf. Z): $\mathcal{Z}\{y[n+2]u[n]\} = z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1]$, $\quad \mathcal{Z}\{y[n+1]u[n]\} = zY(z) - zy[0]$

Eq. dif. (Coef. a determinar): $py[n] \triangleq y[n+1]$,
$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n], \quad f_k[n]$ modos próprios (considerando multiplicidades)

λ: raiz de multiplicidade r de $D(\lambda) \Rightarrow \lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{r-1}\lambda^n$ (r modos próprios)

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad \text{se} \quad \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \quad \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

Solução forçada: $\quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n]$, $D(p)y_h[n] = 0$

$$y_f[n] = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k[n], \qquad g_k[n] \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Ponto de equilíbrio: $\bar{v}$ tal que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =cte. Sistema linear (em torno de $\bar{v}$)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}},\ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}},\ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}},\ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \begin{cases} \text{Autovalores:}\det(\lambda I - A) = 0 \\ \exists i \mid \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 : \bar{v} \text{ instável} \\ \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i : \bar{v} \text{ assint. estável} \\ \exists i \mid \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 : \bar{v} \text{ inconclusivo} \end{cases}$$

$$p = \frac{d}{dt}, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\overline{\beta}_2 p^2 + \overline{\beta}_1 p + \overline{\beta}_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3 = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$\bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \cdot \alpha_k$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix},\quad c' = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_0 \\ \overline{\beta}_1 \\ \overline{\beta}_2 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_0 & \overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2 \end{bmatrix},\qquad d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}\qquad b' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Av + bx\ ,\ y = cv + dx\ ,\ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT,\ \hat{b} = T^{-1}b,\ \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$