

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado final no espaço apropriado.

1ª Questão: a) Calcule a função de transferência $H(s)$ da entrada $x(t)$ para a saída $y(t)$ do sistema linear invariante no tempo causal (condições iniciais nulas) descrito pela seguinte equação diferencial (0,5 ponto)

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{x}(t) + 2x(t).$$

1	
2	
3	
4	
5	

b) Usando o conceito de auto-função, determine a solução forçada $y_f(t)$ para a entrada $x(t) = 9 - 4\exp(t)$ (0,5 ponto).

c) Determine o valor da integral $\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt$. (0,5 ponto).

d) Determine o valor inicial $y(0^+)$ e o valor final $y(+\infty)$ da resposta ao degrau fazendo o uso das propriedades de valor inicial e final (0,5 ponto).

e) Determine a saída persistente (resposta em regime permanente $y_{reg}(t)$) para a entrada rampa $x(t) = tu(t)$, condições iniciais nulas para esse sistema (0,5 ponto).

2ª Questão: Utilizando a transformada unilateral de Laplace, determine $y(t)$ para a seguinte equação diferencial não-homogênea: (1,25 pontos)

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 3x(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad x(t) = (2 \exp(-t))u(t), \quad x(0) = 2.$$

3ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para (1,25 ponto)

$$X(s) = \frac{s+9}{(s-3)(s+1)}, \quad -1 < \operatorname{Re}(s) < 3.$$

4ª Questão: Determine para a equação diferencial abaixo:

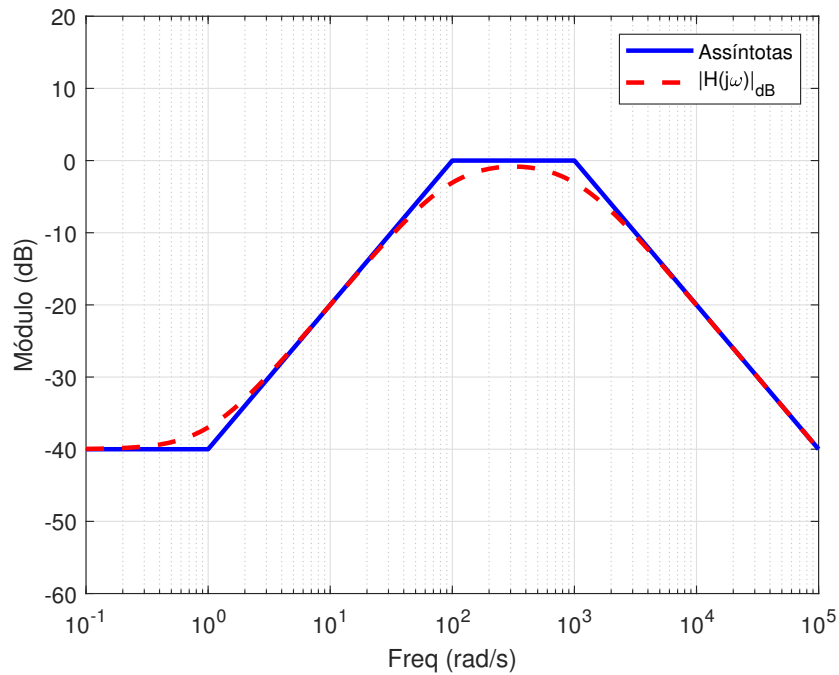
$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 6, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -4$$

a) A parcela forçada da solução $y_f(t)$; (1,0 ponto)

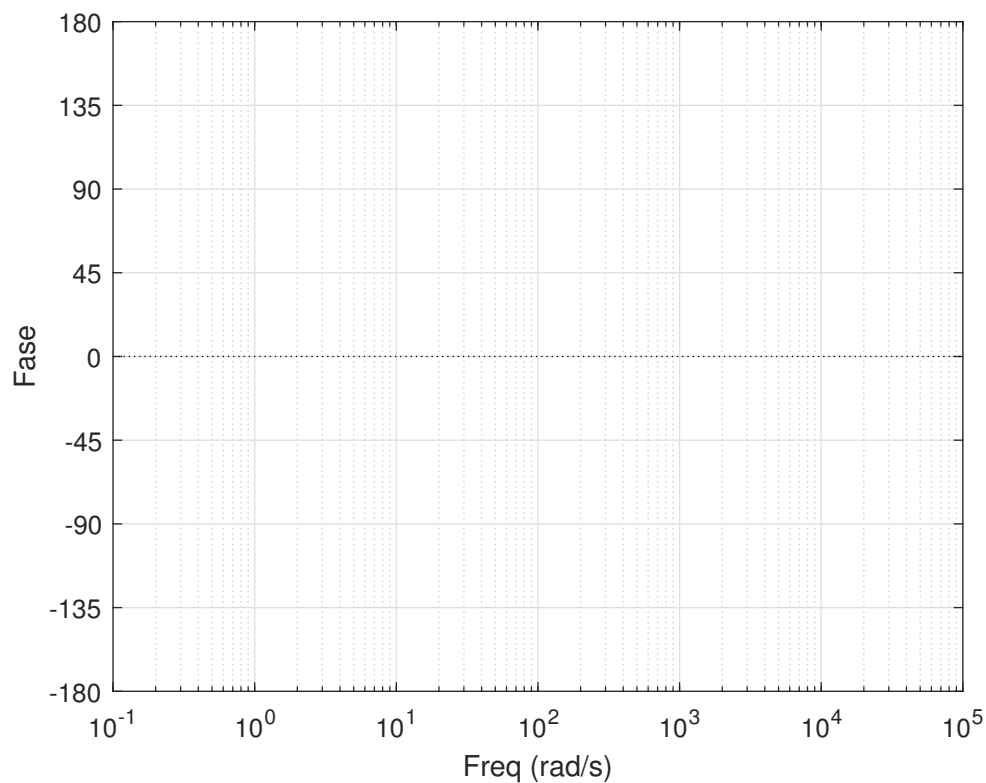
b) A solução completa $y(t) = y_h(t) + y_f(t)$; (1,0 ponto)

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la. (0,5 ponto)

5ª Questão: a) Determine a função de transferência racional $H(s)$ para o sistema de fase mínima cujo módulo da resposta em frequência é dado pelo diagrama abaixo (1,0 ponto)



b) Esboce o diagrama de Bode assintótico de fase do sistema descrito pela função de transferência obtido no item anterior (1,0 ponto)



c) A partir dos diagramas de módulo e fase obtenha a solução forçada para uma entrada $x(t) = 10 \cos(t)$
(0,5 ponto)

CONSULTA

Degrau: $u(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$	Impulso: $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t),$	$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\beta)d\beta$			
Auto-função para SLIT: $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s)\exp(st),$ $x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = H(j\omega) \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$ $x(t) = \sen(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = H(j\omega) \sen(\omega t + \angle H(j\omega))$ em que $H(s) = \left. \frac{N(p)}{D(p)} \right _{p=s}$ é a função de transferência do SLIT descrito pela equação diferencial: $D(p)y = N(p)x.$					
Definição da Transformada bilateral de Laplace: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \quad s \in \Omega_x$					
Tabela de transformadas:					
Propriedades da transformada bilateral de Laplace:					
$x(t)$	$X(s)$	$s \in \Omega_x$	$x(t)$	$X(s)$	$s \in \Omega_x$
Impulso: $\delta(t)$	1	$s \in \mathbb{C}$	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$s \in \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
Degrau: $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$	$x(t - \tau)$	$X(s)\exp(-s\tau)$	$s \in \Omega_x$
Rampa: $tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$	$\Omega_{x+y} \supset \Omega_x \cap \Omega_y$
$\frac{t^m}{m!}u(t)$	$\frac{1}{s^{m+1}}$	$Re(s) > 0$	$\int_{-\infty}^t x(\beta)d\beta$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\Omega_y \supset \Omega_x \cap Re(s) > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) > 0$	$\exp(-at)x(t)$	$X(s+a)$	$(s+a) \in \Omega_x$
$\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$Re(s+a) > 0$	$t^m x(t)$	$(-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m}$	$\Omega_y = \Omega_x$
$\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$Re(s) > 0$	$x(-t)$	$X(-s)$	$-s \in \Omega_x$
$\sen(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$Re(s) > 0$	$-\exp(-at)u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) < 0$
$\exp(-at)\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$Re(s+a) > 0$	$\dot{x}(t)$	$sX(s)$	$\Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$
$\exp(-at)\sen(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$Re(s+a) > 0$	Área da Função: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(0)$ se $s = 0 \in \Omega_x$		
Definição da Transformada unilateral de Laplace: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \quad s \in \Omega_x$					
$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$	$sX(s) - x(0)$	Teorema do Valor inicial: $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$			
$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}$	$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$				
$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m}{dt^m}x(t) = x^{(m)}(t)\right\}$	$s^m X(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$	Teorema do Valor final: $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$			

Resposta em regime de um sistema estável

Degrau ($u(t)$)	$y(t) = \underbrace{H(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$
Rampa ($tu(t)$)	$y(t) = \underbrace{H(0)tu(t) + \dot{H}(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$
Parábola ($\frac{t^2}{2}u(t)$)	$y(t) = \underbrace{H(0)\frac{t^2}{2}u(t) + \dot{H}(0)tu(t) + \frac{1}{2}\ddot{H}(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t) \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t \exp(\lambda t)$, $\dots$, $t^{r-1} \exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p)y_h(t) = 0$$

Resposta em Frequência: $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt$, $H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \text{ sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \Rightarrow M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) ; \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} ; M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Resumo Assíntotas Diagrama de Bode

O comportamento das assíntotas de módulo e fase são dados na tabela abaixo. Observe que cada polo faz com que o módulo caia -20dB/década e que a fase diminua em -90°, enquanto cada zero faz com que o ganho suba +20dB/década e que a fase aumente +90° (em que uma década equivale a uma multiplicação por 10 na frequência).

Tipo	Função de transferência	$ H(j\omega) $		$\angle H(j\omega)$		
Ganho constante	$H(s) = k$	$20 \log(k)$		$k > 0$	$k < 0$	
				0°	180°	
Zero de ordem m na origem	$H(s) = s^m$	$m(20 \log(\omega))$		$+90^\circ(m)$		
Polo de ordem n na origem	$H(s) = \frac{1}{s^n}$	$n(-20 \log(\omega))$		$-90^\circ(n)$		
Polo fora da origem	$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$	$\omega \leq \omega_c$	$\omega > \omega_c$	$\omega \leq \frac{\omega_c}{10}$	$\omega = \omega_c$	$\omega \geq 10\omega_c$
		0	-20dB/déc	0°	-45°	-90°
Zero fora da origem	$H(s) = \frac{s + \omega_c}{\omega_c}$	$\omega \leq \omega_c$	$\omega > \omega_c$	$\omega \leq \frac{\omega_c}{10}$	$\omega = \omega_c$	$\omega \geq 10\omega_c$
		0	+20dB/déc	0°	$+45^\circ$	$+90^\circ$
Polos complexo conjugados	$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega \leq \omega_n$	$\omega > \omega_n$	$\omega \leq \frac{\omega_n}{10}$	$\omega = \omega_n$	$\omega \geq 10\omega_n$
		0	-40dB/déc	0°	-90°	-180°
Zeros complexo conjugados	$H(s) = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$	$\omega \leq \omega_n$	$\omega > \omega_n$	$\omega \leq \frac{\omega_n}{10}$	$\omega = \omega_n$	$\omega \geq 10\omega_n$
		0	+40dB/déc	0°	$+90^\circ$	$+180^\circ$

Identificação de função de transferência pelo diagrama de Bode do módulo

- Começa com inclinação positiva: $\Rightarrow$ há zeros na origem $s^m \Rightarrow +m20\text{db/década}$
- Começa com inclinação negativa: $\Rightarrow$ há polos na origem $\frac{1}{s^m} \Rightarrow -m20\text{db/década}$
- Cruza a frequência $\omega = 10^0$ em XdB: $\Rightarrow$ há um ganho: $20 \log(k) = X \Rightarrow k = 10^{(X/20)}$
- Ponto de inflexão positivo +20dB/década em ω_c : $\Rightarrow$ zero fora da origem: $\frac{s+\omega_c}{\omega_c}$
- Ponto de inflexão negativo -20dB/década em ω_c : $\Rightarrow$ polo fora da origem $\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$
- Ponto de inflexão positivo +40dB/década em ω_n com pico de ressonância:
 $\Rightarrow$ zeros complexo conjugados: $\frac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$
- Ponto de inflexão negativo -40dB/década em ω_n com pico de ressonância:
 $\Rightarrow$ polos complexo conjugados: $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$