1ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal (condições iniciais nulas) descrito pela equação abaixo:

$$y[n+2] - 6y[n] = x[n+1]$$

e determine
a) a função de transferência.

b) a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = 5 + 2^{n+1}$, usando o conceito de auto-função.

2ª Questão: Determine, para a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{36z^2 - 21z}{4z^2 - 5z + 1} = \frac{3z(12z - 7)}{(z-1)(4z-1)}, \qquad |z| > 1$$

a) $x[0]$, b) $x[1]$, c) $x[2]$, d) $x[+\infty]$.

3ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{8z^2}{(z-2)^3}, \qquad |z| < 2.$$

4ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 + 8z}{(z^2 + 6z + 8)} = \frac{z^2 + 8z}{(z+2)(z+4)}, \qquad 2 < |z| < 4.$$

5ª Questão: Determine a resposta ao degrau para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças

$$y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = 10x[n+2] + 22x[n+1]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças a resposta ao degrau para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = 0, \qquad y[0] = 5, \quad y[1] = -4.$$

b) Determine $y[n]$ a partir da solução da questão anterior.

7ª Questão: Determine para a equação a diferenças abaixo:

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = -3x[n+1], \qquad y[0] = -2, y[1] = 1, x[n] = (-2)^n$$

a) A parcela forçada da solução $y_f(t)$;

b) A solução completa $y[n] = y_h[n] + y_f[n]$;

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la.

8ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_2 + 2)(v_1 - 3) + 5x \\ \dot{v}_2 &= (v_1 - 2)(v_2 - 1) - 3x^2 \end{aligned}$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que, em torno dos pontos de equilíbrio dado que

$$\dot{v} = Av + bx, \qquad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear.

9ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddddot{y} + 3\dddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 10\,\ddddot{x} + 9\ddot{x} + 8\dot{x} + 6x.$$

Consulta

Degrau: $u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	**Impulso:** $\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$,	$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

Auto-função para SLIT:

$$x[n] = z^n \Rightarrow y_f[n] = H(z)z^n,$$

em que $H(z) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=z}$ é a função de transferência do SLIT descrito pela equação a diferenças: $D(p)y[n] = N(p)x[n]$ e p é o operador avanço, ou seja, $py[n] = y[n+1]$, $p^2y[n] = y[n+2]$, …, $p^m y[n] = y[n+m]$

Definição da Transformada bilateral Z:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \cdots x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \quad z \in \Omega_x$$

Tabela de transformadas:

$x[n]$	$X(z)$	$z \in \Omega_x$
Impulso: $\delta[n]$	1	$z \in \mathbb{C}$
Degrau: $u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^{n-1}u[n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^{n-1}u[-n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$n^2a^n u[n]$	$\frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}$	$\|z\| > \|a\|$
$\binom{n}{m} a^{n-m}u[n]$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$\binom{n+m}{m} a^n u[n]$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\| > \|a\|$

Propriedades da transformada bilateral Z:

$x[n]$	$X(z)$	$z \in \Omega_x$
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$\Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$\Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
$n^m x[n]$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$	Ω_x
$x[n-m]u[n-m]$	$z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$	Ω_x
$x[n+m]u[n]$	$z^m\mathcal{Z}\left(x[n]u[n] - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right)$	Ω_x
$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$z^{-1} \in \Omega_x$

Soma: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] = X(z)|_{z=1}$ se $z = 1 \in \Omega_x$

Teorema do Valor inicial: $x[0] = \lim_{|z|\to\infty} X(z)$, se Ω_x é o exterior de um círculo

Teorema do Valor final: $x[+\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot X(z)$, $|z| > \rho$, $0 < \rho \leq 1$

Eq. dif. (Transf. Z): $\mathcal{Z}\{y[n+2]u[n]\} = z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]$, $\quad \mathcal{Z}\{y[n+1]u[n]\} = zY(z) - zy[0]$

Eq. dif. (Coef. a determinar): $py[n] \triangleq y[n+1]$,
$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n], \quad f_k[n]$ modos próprios (considerando multiplicidades)

λ: raiz de multiplicidade r de $D(\lambda) \Rightarrow \lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{r-1}\lambda^n$ (r modos próprios)

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad \text{se} \quad \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \;,\; D(p)y_h[n] = 0$$

$$y_f[n] = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k[n], \quad g_k[n] \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Ponto de equilíbrio: $\bar{v}$ tal que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =cte. Sistema linear (em torno de $\bar{v}$)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \; B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \; C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \; D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \begin{cases} \text{Autovalores:}\, \det(\lambda I - A) = 0 \\ \exists i \mid \text{Re}(\lambda_i) > 0 : \bar{v} \text{ instável} \\ \text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i : \bar{v} \text{ assint. estável} \\ \exists i \mid \text{Re}(\lambda_i) = 0 : \bar{v} \text{ inconclusivo} \end{cases}$$

$$p = \frac{d}{dt}, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\overline{\beta}_2 p^2 + \overline{\beta}_1 p + \overline{\beta}_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3 = c(p\mathrm{I} - A)^{-1} b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1} c' + d$$

$$\bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \alpha_k$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad c' = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_0 \\ \overline{\beta}_1 \\ \overline{\beta}_2 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_0 & \overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2 \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Av + bx \;, \; y = cv + dx \;, \; \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1} b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1} c' + d$$

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1} A T, \; \hat{b} = T^{-1} b, \; \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$