1ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal (condições iniciais nulas) descrito pela equação abaixo:

$$y[n+2] - 6y[n] = x[n+1]$$

e determine
a) a função de transferência.

Solução:

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \Rightarrow (p^2 - 6)y[n] = px[n] \Rightarrow H(z) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=z} = \frac{z}{(z^2-6)}.$$

b) a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = 5 + 2^{n+1}$, usando o conceito de auto-função.

Solução:

$$x[n] = 5(1)^n + 2(2)^n$$
$$y_f[n] = 5H(1)(1)^n + 2H(2)(2)^n = 5 \cdot \frac{1}{-5}(1)^n + 2 \cdot \frac{2}{-2}(2)^n = -1 - 2(2)^n = -1 - (2)^{n+1}.$$

2ª Questão: Determine, para a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{36z^2 - 21z}{4z^2 - 5z + 1} = \frac{3z(12z-7)}{(z-1)(4z-1)}, \qquad |z| > 1$$

a) $x[0]$, b) $x[1]$, c) $x[2]$, d) $x[+\infty]$.

Solução:
a), b), c)

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
36z^2 & -21z & & & 4z^2 & -5z & +1 \\ \cline{5-7}
-36z^2 & +45z & -9 & & 9 & +6z^{-1} & +\frac{21}{4}z^{-2} \\ \cline{1-3}
 & 24z & -9 & & & & \\
 & -24z & +30 & -6z^{-1} & & & \\ \cline{2-4}
 & & +21 & -6z^{-1} & & &
\end{array}$$

$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots = 9 + 6z^{-1} + \frac{21}{4}z^{-2} + \cdots$, assim, $x[0] = 9$, $x[1] = 6$, $x[2] = \frac{21}{4}$.
Outra forma de calcular o valor inicial seria fazendo o uso da propriedade de valor inicial:

$$x[0] = \lim_{|z|\to+\infty} X(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{36z^2 - 21z}{4z^2 - 5z + 1} = \frac{36 - \frac{21}{z}}{4 - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2}} = \frac{36}{4} = 9.$$

d) $x[\infty]$ pode ser calculado fazendo o uso da propriedades de valor final:

$$x[+\infty] = \lim_{z\to1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to1} \cancel{(z-1)} \frac{3z(12z-7)}{\cancel{(z-1)}(4z-1)} = \frac{\cancel{3}(12-7)}{\cancel{3}} = 5.$$

3ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{8z^2}{(z-2)^3}, \qquad |z| < 2.$$

Solução:

Usando a propriedade da Reversão: $y[n] = x[-n]$ se $Y(z) = X(z^{-1})$, $z^{-1} \in \Omega_x = |z^{-1}| < 2 \Rightarrow |z| > 1/2$, tem-se

$$Y(z) = \frac{8z^{-2}}{(z^{-1}-2)^3} \cdot \frac{z^3}{z^3} = \frac{8z}{(1-2z)^3} = \frac{8z}{(-2)^3\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3}$$

Da tabela, tem-se que: $\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$, $|z| > |a|$, então:

$$y[n] = -\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n] = -\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\cancel{(n-2)!}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 4u[n] = -2n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = -2(-n)(-n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] = -2n(n+1)2^n u[-n] = -n(n+1)2^{n+1}u[-n]$$

4ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$X(z) = \frac{z^2+8z}{(z^2+6z+8)} = \frac{z^2+8z}{(z+2)(z+4)}, \qquad 2 < |z| < 4.$$

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+8}{(z+2)(z+4)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+4}$$

$$A = (z+2)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=-2} = 3, \quad B = (z+4)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=-4} = -2,$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{3z}{z+2}}_{|z|>2} + \underbrace{\frac{-2z}{z+4}}_{|z|<4}$$

$$x[n] = 3\,(-2)^n\,u[n] + 2(-4)^n u[-n-1]$$

5ª Questão: Determine a resposta ao degrau para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças

$$y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = 10x[n+2] + 22x[n+1]$$

Solução: Sabendo que para entrada degrau considera-se condições iniciais nulas e $X(z) = \mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}$, tem-se:

$$z^2Y(z) + 2zY(z) - 3Y(z) = 10z^2X(z) + 22zX(z)$$

$$(z^2+2z-3)Y(z) = (10z^2+22z)\frac{z}{z-1} \Rightarrow (z-1)(z+3)Y(z) = (10z^2+22z)\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10z^2+22z}{(z-1)^2(z+3)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+3}$$

$$10z^2+22z = A(z+3) + B(z-1)(z+3) + C(z-1)^2$$

$$z=1: \qquad 32 = 4A \Rightarrow A = \frac{32}{4} = 8$$

$$z=-3: \quad 24 = 16C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$z=0: \quad 0 = 3A - 3B + C \Rightarrow 0 = 24 + \frac{3}{2} - 3B \Rightarrow B = \frac{-51}{-6} = \frac{17}{2}$$

$$Y(z) = 8\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{17}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{z}{z+3}$$

$$y[n] = \left(8n + \frac{17}{2} + \frac{3}{2}(-3)^n\right)u[n].$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças a resposta ao degrau para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = 0, \qquad y[0] = 5, \quad y[1] = -4.$$

b) Determine $y[n]$ a partir da solução da questão anterior.

Solução:
a)

$$\begin{aligned}
z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] + 4zY(z) - 4zy[0] + 4Y(z) &= 0 \\
(z^2 + 4z + 4)Y(z) &= z^2y[0] + zy[1] + 4zy[0] \\
Y(z) &= \frac{z^2y[0] + zy[1] + 4zy[0]}{(z+2)^2} \\
Y(z) &= \frac{5z^2 - 4z + 20z}{(z+2)^2} = \frac{5z^2 + 16z}{(z+2)^2}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{5z+16}{(z+2)^2} = \frac{A}{(z+2)^2} + \frac{B}{(z+2)}$$
$$5z + 16 = A + B(z+2)$$
$$\mathbf{B = 5}, \Rightarrow A + 2B = 16 \Rightarrow \mathbf{A = 16 - 10 = 6},$$
$$Y(z) = 6\frac{z}{(z+2)^2} + 5\frac{z}{z+2}$$
$$\mathbf{y[n] = 6n(-2)^{n-1}u[n] + 5(-2)^n u[n] = (-3n+5)\,(-2)^n u[n]}.$$

7ª Questão: Determine para a equação a diferenças abaixo:

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = -3x[n+1], \qquad y[0] = -2, y[1] = 1, x[n] = (-2)^n$$

a) A parcela forçada da solução $y_f(t)$;

Solução: a) Para saber se há ressonância, primeiramente é necessário calcular a solução da equação característica a fim de obter os modos próprios. $D(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} \Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Por outro lado, $x[n] = (-2)^n$ o que implica em $\gamma_1 = -2$, ou seja, há ressonância com um dos modos próprios.

$$y_h[n] = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n \Rightarrow y_f[n] = b_1 n(-2)^n$$

Ao substituir a parcela forçada na equação a diferenças original, tem-se

$$\begin{gathered}
y_f[n+2] + 3y_f[n+1] + 2y_f[n] = -3x[n+1] \\
b_1(n+2)(-2)^{n+2} + 3b_1(n+1)(-2)^{n+1} + 2b_1 n(-2)^n = -3(-2)^{n+1} \\
4b_1(n+2)\cancel{(-2)^n} - 6b_1(n+1)\cancel{(-2)^n} + 2b_1 n\cancel{(-2)^n} = 6\cancel{(-2)^n} \\
\cancel{4b_1 n} + 8b_1 \cancel{- 6b_1 n} - 6b_1 + \cancel{2b_1 n} = 6 \Rightarrow 2b_1 = 6 \Rightarrow b_1 = 3 \\
\Rightarrow y_f[n] = 3n(-2)^n.
\end{gathered}$$

b) A solução completa $y[n] = y_h[n] + y_f[n]$;

Solução: b)

$$y[n] = y_h[n] + y_f[n] = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n + 3n(-2)^n$$
$$y[0] = -2 = a_1(-1)^0 + a_2(-2)^0 + 3\cdot 0(-2)^0 \Rightarrow a_1 + a_2 = -2 \Rightarrow a_1 = -2 - a_2$$
$$y[1] = 1 = a_1(-1)^1 + a_2(-2)^1 + 3\cdot 1(-2)^1 \Rightarrow -a_1 - 2a_2 - 6 = 1$$
$$\Rightarrow 2 + a_2 - 2a_2 = 7 \Rightarrow a_2 = -5 \Rightarrow a_1 = -2 + 5 = 3$$
$$\Rightarrow y[n] = 3(-1)^n - 5(-2)^n + 3n(-2)^n$$

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la.

Solução: c)

$$\bar{D}(p) = (p - \gamma_1) = (p + 2),$$
$$\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0 \Rightarrow (p+1)(p+2)^2 y[n] = 0.$$

Como há 1 modo forçado, precisamos de mais 1 condição inicial ($y[2]$) que vai ser obtida a partir da equação a diferenças original. Para $n = 0$:

$$y[2] + 3y[1] + 2y[0] = -3x[1] \Rightarrow y[2] = -3y[1] - 2y[0] - 3(-2)^1 \Rightarrow y[2] = -3 + 4 + 6 = 7.$$

8ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = (v_2 + 2)(v_1 - 3) + 5x$$
$$\dot{v}_2 = (v_1 - 2)(v_2 - 1) - 3x^2$$

Solução: a)

$$\begin{cases} (v_2 + 2)(v_1 - 3) = 0, \\ (v_1 - 2)(v_2 - 1) = 0 \end{cases}$$
$$(v_2 + 2) = 0 \Rightarrow v_2 = -2 \Rightarrow (v_1 - 2)(-2 - 1) = 0 \Rightarrow v_1 = 2 \Rightarrow (2, -2)$$
$$v_1 - 3 = 0 \Rightarrow v_1 = 3 \Rightarrow (3 - 2)(v_2 - 1) = 0 \Rightarrow v_2 = 1 \Rightarrow (3, 1)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que, em torno dos pontos de equilíbrio dado que

$$\dot{v} = Av + bx, \qquad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear.

Solução: b)

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{v}_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \dot{v}_1}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial \dot{v}_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \dot{v}_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_2 + 2) & (v_1 - 3) \\ (v_2 - 1) & (v_1 - 2) \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{v}_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \dot{v}_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6x \end{bmatrix}$$
$$\text{Para } \bar{v} = (2, -2), \bar{x} = 0 : \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} x$$
$$\Rightarrow \text{Instável pois um dos autovalores}(\pm\sqrt{3})\text{possui parte real positiva!}$$
$$\text{Para } \bar{v} = (3, 1), \bar{x} = 0 : \dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} x$$
$$\Rightarrow \text{Instável pois possui autovalores}(1 \; e \; 3)\text{com parte real positiva!}$$

9ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 10\,\dddot{x} + 9\ddot{x} + 8\dot{x} + 6x.$$

Solução:

$$D(p)y = N(p)x \Rightarrow (p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0)y = (\beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0)x$$
$$(p^3 + 3p^2 + 4p + 5)y = (10p^3 + 9p^2 + 8p + 6)x$$
$$\alpha_2 = 3, \quad \alpha_1 = 4, \quad \alpha_0 = 5,$$
$$\beta_3 = 10, \quad \beta_2 = 9, \quad \beta_1 = 8, \quad \beta_0 = 6,$$
$$\bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \alpha_k$$
$$\bar{\beta}_2 = \beta_2 - \beta_3\alpha_2 = 9 - 10 \cdot 3 = -21,$$
$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 - \beta_3\alpha_1 = 8 - 10 \cdot 4 = -32,$$
$$\bar{\beta}_0 = \beta_0 - \beta_3\alpha_0 = 6 - 10 \cdot 5 = -44.$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$c = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 & -32 & -21 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$