1ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ e a resposta ao impulso , ou seja, $y(t) = h(t)$ para $x(t) = \delta(t)$ (condições iniciais nulas) para o sistema descrito pela seguinte equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 3\dot{x}(t) + 4x(t).$$

b) Determine a resposta ao degrau ($y(t)$ para $x(t) = u(t)$) para o sistema descrito pela equação diferencial da letra a)

c) Determine a solução forçada $y_f(t)$ para a entrada $x(t) = 5 - 2\exp(3t)$

d) Determine o valor das integrais $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$ e $\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt$.

e) Determine a saída persistente (resposta em regime permanente $y_{reg}(t)$) para a entrada rampa ($x(t) = tu(t)$, condições iniciais nulas) para esse sistema.

f) Esse sistema segue a entrada degrau com erro de regime nulo? E segue a entrada rampa com erro de regime nulo? Justifique sua resposta (0,5 ponto).

g) Determine o valor inicial $y(0^+)$ e o valor final $y(+\infty)$ da resposta ao degrau fazendo o uso das propriedades de valor inicial e final e verifique se seus resultados estão coerentes com a resposta do item (b).

2ª Questão: Utilizando a transformada unilateral de Laplace, determine $y(t)$ para a seguinte equação diferencial não-homogênea:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t), \qquad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 5, \qquad x(t) = \exp(-2t)u(t).$$

3ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = 5\frac{(s-4)}{(s-4)^2 + 3^2}, \qquad \text{Re}(s) < 4.$$

4ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = \frac{7s^2 + 44s + 61}{(s+5)^2(s-3)}, \qquad -5 < \text{Re}(s) < 3.$$

5ª Questão: Determine para a equação diferencial abaixo:

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 18\text{sen}(3t), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

a) A parcela forçada da solução $y_f(t)$;

b) A solução completa $y(t) = y_h(t) + y_f(t)$;

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la.

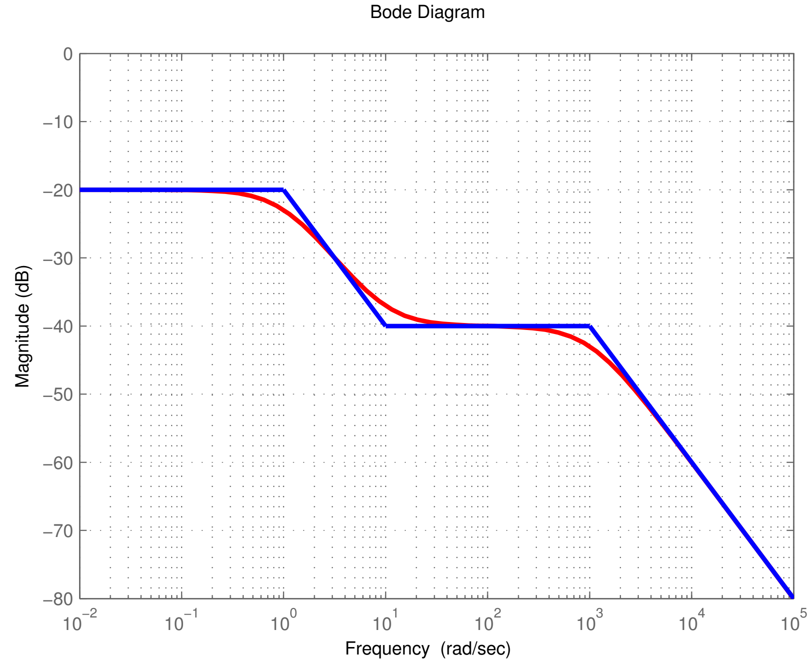
6ª Questão: a) Determine a equação diferencial homogênea ordinária linear a coeficientes constantes e as condições iniciais que produzem a mesma solução $y(t)$ que a equação diferencial não homogênea abaixo (1,0 ponto)

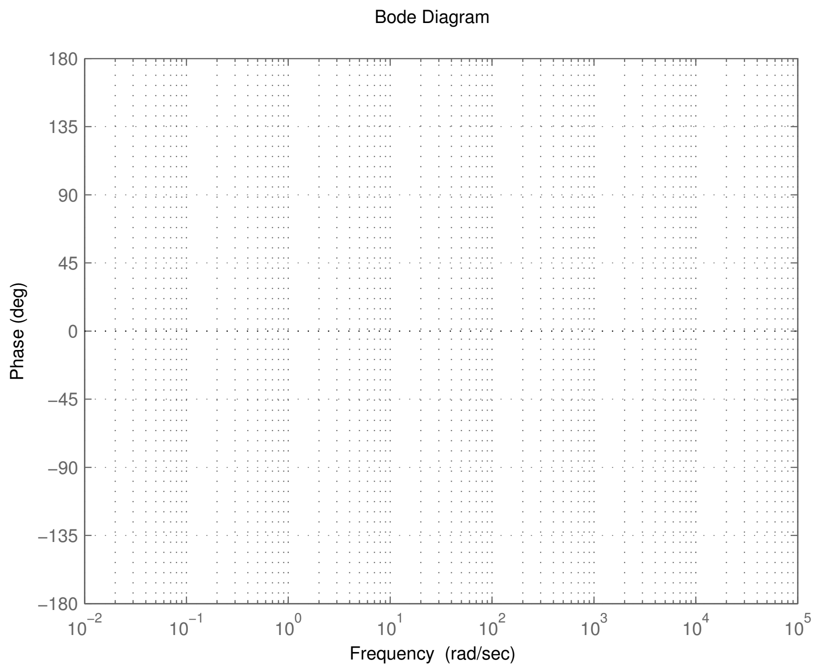
$$(p+2)y = 10t\exp(2t), \quad y(0) = 1.$$

b) Determine a solução forçada da equação diferencial.

c) Determine a solução completa da equação diferencial.

$7^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine a função de transferência racional e esboce o diagrama assintótico de fase do sistema de fase mínima cujo módulo da resposta em frequência é dado pelo diagrama abaixo





b) A partir do diagrama de módulo apresentado na letra a) dessa questão, determine a relação sinal-ruído $(S/N)_{dB}$ na saída do sistema para a seguinte entrada

$$x(t) = \underbrace{100\cos(t)}_{\text{sinal}} + \underbrace{\text{sen}(100t)}_{\text{ruído}}.$$

Consulta

Degrau: $u(t) = \begin{cases} 0, t \le 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$	**Impulso:** $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t),$	$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$

Auto-função para SLIT: $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s)\exp(st),$

$x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)|\cos(\omega t + \angle H(j\omega))$

$x(t) = \text{sen}(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega))$

em que $H(s) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=s}$ é a função de transferência do SLIT descrito pela equação diferencial: $D(p)y = N(p)x$.

Definição da Transformada bilateral de Laplace: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt,\ \ s \in \Omega_x$

Tabela de transformadas:			**Propriedades da transformada bilateral de Laplace:**		
$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{X(s)}$	$\boldsymbol{s \in \Omega_x}$	$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{X(s)}$	$\boldsymbol{s \in \Omega_x}$
Impulso: $\delta(t)$	1	$s \in \mathbb{C}$	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$s \in \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
Degrau: $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$	$x(t-\tau)$	$X(s)\exp(-s\tau)$	$s \in \Omega_x$
Rampa: $tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$	$\Omega_{x+y} \supset \Omega_x \cap \Omega_y$
$\frac{t^m}{m!}u(t)$	$\frac{1}{s^{m+1}}$	$Re(s) > 0$	$\int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\Omega_y \supset \Omega_x \cap Re(s) > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) > 0$	$\exp(-at)x(t)$	$X(s+a)$	$(s+a) \in \Omega_x$
$\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$Re(s+a) > 0$	$t^m x(t)$	$(-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m}$	$\Omega_y = \Omega_x$
$\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$Re(s) > 0$	$x(-t)$	$X(-s)$	$-s \in \Omega_x$
$\text{sen}(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$Re(s) > 0$	$-\exp(-at)u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) < 0$
$\exp(-at)\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$Re(s+a) > 0$	$\dot{x}(t)$	$sX(s)$	$\Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$
$\exp(-at)\text{sen}(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$Re(s+a) > 0$	**Área da Função:** $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(0)$ se $s = 0 \in \Omega_x$		

Definição da Transformada unilateral de Laplace: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)exp(-st)dt,\ \ s \in \Omega_x$

$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$	$sX(s) - x(0)$	**Teorema do Valor inicial:** $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot X(s)$
$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}$	$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$	
$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m}{dt^m}x(t) = x^{(m)}(t)\right\}$	$s^mX(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$	**Teorema do Valor final:** $x(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot X(s)$

Resposta em regime de um sistema estável

Degrau $(u(t))$	$y(t) = \underbrace{H(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$
Rampa $(tu(t))$	$y(t) = \underbrace{H(0)tu(t) + \dot{H}(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$
Parábola $(\frac{t^2}{2}u(t))$	$y(t) = \underbrace{H(0)\frac{t^2}{2}u(t) + \dot{H}(0)tu(t) + \frac{1}{2}\ddot{H}(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t) \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \ \ , \ \ \text{se} \ \ \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

Resposta em Freqüência: $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$
Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \ \ \text{sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Resumo Assíntotas Diagrama de Bode
O comportamento das assíntotas de módulo e fase são dados na tabela abaixo. Observe que cada polo faz com que o módulo caia -20dB/década e que a fase diminua em -90°, enquanto cada zero faz com que o ganho suba +20dB/década e que a fase aumente +90° (em que uma década equivale a uma multiplicação por 10 na frequência).

<table>
<tr><th>Tipo</th><th>Função de transferência</th><th colspan="2">$|H(j\omega)|$</th><th colspan="3">$\angle H(j\omega)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ganho constante</td><td rowspan="2">$H(s) = k$</td><td colspan="2" rowspan="2">$20\log(|k|)$</td><td colspan="2">$k > 0$</td><td>$k < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">0^o</td><td>180^o</td></tr>
<tr><td>Zero de ordem m na origem</td><td>$H(s) = s^m$</td><td colspan="2">$m(20\log(\omega))$</td><td colspan="3">$+90^o(m)$</td></tr>
<tr><td>Polo de ordem n na origem</td><td>$H(s) = \frac{1}{s^n}$</td><td colspan="2">$n(-20\log(\omega))$</td><td colspan="3">$-90^o(n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Polo fora da origem</td><td rowspan="2">$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$</td><td>$\omega \le \omega_c$</td><td>$\omega > \omega_c$</td><td>$\omega \le \frac{\omega_c}{10}$</td><td>$\omega = \omega_c$</td><td>$\omega \ge 10\omega_c$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>−20dB/déc</td><td>0^o</td><td>-45^o</td><td>-90^o</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Zero fora da origem</td><td rowspan="2">$H(s) = \frac{s+\omega_c}{\omega_c}$</td><td>$\omega \le \omega_c$</td><td>$\omega > \omega_c$</td><td>$\omega \le \frac{\omega_c}{10}$</td><td>$\omega = \omega_c$</td><td>$\omega \ge 10\omega_c$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+20dB/déc</td><td>0^o</td><td>$+45^o$</td><td>$+90^o$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Polos complexo conjugados</td><td rowspan="2">$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$</td><td>$\omega \le \omega_n$</td><td>$\omega > \omega_n$</td><td>$\omega \le \frac{\omega_n}{10}$</td><td>$\omega = \omega_n$</td><td>$\omega \ge 10\omega_n$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>−40dB/déc</td><td>0^o</td><td>-90^o</td><td>-180^o</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Zeros complexo conjugados</td><td rowspan="2">$H(s) = \frac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$</td><td>$\omega \le \omega_n$</td><td>$\omega > \omega_n$</td><td>$\omega \le \frac{\omega_n}{10}$</td><td>$\omega = \omega_n$</td><td>$\omega \ge 10\omega_n$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+40dB/déc</td><td>0^o</td><td>$+90^o$</td><td>$+180^o$</td></tr>
</table>

Identificação de função de transferência pelo diagrama de Bode do módulo
- Começa com inclinação positiva: $\Rightarrow$ há zeros na origem s^m $\Rightarrow$ +m20db/década
- Começa com inclinação negativa: $\Rightarrow$ há polos na origem $\frac{1}{s^m}$ $\Rightarrow$ -m20db/década
- Cruza a frequência $\omega = 10^0$ em XdB: $\Rightarrow$ há um ganho: $20\log(k) = X \Rightarrow k = 10^{(X/20)}$
- Ponto de inflexão positivo +20dB/década em ω_c: $\Rightarrow$ zero fora da origem: $\frac{s+\omega_c}{\omega_c}$
- Ponto de inflexão negativo -20dB/década em ω_c: $\Rightarrow$ polo fora da origem $\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$
- Ponto de inflexão positivo +40dB/década em ω_n com pico de ressonância:

$\Rightarrow$ zeros complexo conjugados: $\frac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$
- Ponto de inflexão negativo -40dB/década em ω_n com pico de ressonância:

$\Rightarrow$ polos complexo conjugados: $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$