$1^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine a função de transferência $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ e a resposta ao impulso , ou seja, $y(t) = h(t)$ para $x(t) = \delta(t)$ (condições iniciais nulas) para o sistema descrito pela seguinte equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 3\dot{x}(t) + 4x(t).$$

Solução:

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \Rightarrow (p^2 + 4p + 4)y(t) = (3p + 4)x(t)$$

$$H(s) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=s} = \frac{3s+4}{s^2+4s+4} = \frac{3s+4}{(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$3s + 4 = A + B(s+2) \Rightarrow B = 3, \quad A + 2B = 4 \Rightarrow A = 4 - 6 = -2$$

$$H(s) = -\frac{2}{(s+2)^2} + \frac{3}{(s+2)} \Rightarrow h(t) = (-2t + 3)\exp(-2t)u(t)$$

b) Determine a resposta ao degrau ($y(t)$ para $x(t) = u(t)$) para o sistema descrito pela equação diferencial da letra a)

Solução:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{3s+4}{s(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{s}$$

$$3s + 4 = As + Bs(s+2) + C(s+2)^2 = (C+B)s^2 + (A + 2B + 4C)s + 4C$$

$$C = \frac{4}{4} = 1, \quad B = 0 - C = -1, \quad A = 3 - 2B - 4C = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = (t\exp(-2t) - \exp(-2t) + 1)u(t).$$

c) Determine a solução forçada $y_f(t)$ para a entrada $x(t) = 5 - 2\exp(3t)$

Solução:

$$x(t) = 5\exp(0t) - 2\exp(3t) \Rightarrow y_f(t) = 5H(0)\exp(0t) - 2H(3)\exp(3t)$$

$$H(0) = \frac{3\cdot 0 + 4}{(0+2)^2} = \frac{4}{4} = 1, \quad H(3) = \frac{3\cdot 3 + 4}{(3+2)^2} = \frac{13}{25}$$

$$y_f(t) = 5\cdot 1\exp(0t) - 2\cdot\frac{13}{25}\exp(3t) = 5 - \frac{26}{25}\exp(3t)$$

d) Determine o valor das integrais $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$ e $\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt$.

Solução:
Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0)$, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = H(0) = \frac{3\cdot 0 + 4}{(0+2)^2} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt = -\left.\frac{d}{ds}H(s)\right|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3s+4}{s^2+4s+4}\right)$$

$$= -\left.\frac{3(s^2+4s+4) - (3s+4)(2s+4)}{(s+2)^4}\right|_{s=0} = -\frac{12-16}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

e) Determine a saída persistente (resposta em regime permanente $y_{reg}(t)$) para a entrada rampa ($x(t) = tu(t)$, condições iniciais nulas) para esse sistema.

Solução:

$$y_{reg}(t) = \Big(H(0)t + \dot{H}(0)\Big)\, u(t) = \left(1 \cdot t - \frac{1}{4}\right) u(t).$$

f) Esse sistema segue a entrada degrau com erro de regime nulo? E segue a entrada rampa com erro de regime nulo? Justifique sua resposta (0,5 ponto).

Solução: Segue ao degrau com erro de regime nulo pois

$$H(0) = 1 \Rightarrow y_{reg}(t) = H(0)u(t) = u(t).$$

Não segue a rampa com erro de regime nulo, pois embora $H(0) = 1$,

$$\dot{H}(0) \neq 0 \Rightarrow y_{reg}(t) = H(0t)u(t) + \dot{H}(0)u(t) \neq tu(t).$$

g) Determine o valor inicial $y(0^+)$ e o valor final $y(+\infty)$ da resposta ao degrau fazendo o uso das propriedades de valor inicial e final e verifique se seus resultados estão coerentes com a resposta do item (b).

Solução:

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{H(s)}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{3s+4}{(s+2)^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{3/s + 4/s^2}{1 + 4/s + 4/s^2} = 0,$$
$$y(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{H(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{3s+4}{(s+2)^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

2ª Questão: Utilizando a transformada unilateral de Laplace, determine $y(t)$ para a seguinte equação diferencial não-homogênea:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t), \qquad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 5, \qquad x(t) = \exp(-2t)u(t).$$

Solução: Sabendo que $X(s) = \dfrac{1}{s+2}$, tem-se:

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) = X(s)$$
$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = X(s) + sy(0) + \dot{y}(0) + 5y(0)$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s^2 + 5s + 6)}X(s)}_{Y_{ci}} + \underbrace{\frac{2s + 5 + 10}{(s^2 + 5s + 6)}}_{Y_{en}}$$

Calculando as raízes do polinômio característico (denominador de $Y(s)$), temos

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \Rightarrow s = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow s_1 = -2, s_2 = -3$$

o que implica que o polinômio pode ser reescrito como

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2(s+3)}}_{Y_{ci}} + \underbrace{\frac{2s + 15}{(s+2)(s+3)}}_{Y_{en}}$$
$$Y(s) = \frac{1 + (2s + 15)(s + 2)}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{2s^2 + 19s + 31}{(s+2)^2(s+3)}$$
$$Y(s) = \frac{2s^2 + 19s + 31}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}$$
$$2s^2 + 19s + 31 = A(s + 3) + B(s + 2)(s + 3) + C(s + 2)^2 = (B + C)s^2 + (A + 5B + 4C)s + (3A + 6B + 4C)$$
$$s^2: \quad B + C = 2 \Rightarrow B = 2 - C$$
$$s^1: \quad A + 5B + 4C = 19 \Rightarrow A + 10 - 5C + 4C = 19 \Rightarrow A = 9 + C$$
$$s^0: \quad 3A + 6B + 4C = 31 \Rightarrow 27 + 3C + 12 - 6C + 4C = 31 \Rightarrow C = -8 \Rightarrow B = 10 \Rightarrow A = 1$$
$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{10}{(s+2)} - \frac{8}{(s+3)}$$
$$y(t) = [t\exp(-2t) + 10\exp(-2t) - 8\exp(-3t)]\,u(t).$$

3ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = 5\frac{(s-4)}{(s-4)^2 + 3^2}, \qquad \mathrm{Re}(s) < 4.$$

Solução:

$$Y(s) = X(-s), \qquad \mathrm{Re}(-s) < 4 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) > -4$$
$$Y(s) = 5\frac{-s-4}{(-s-4)^2 + 3^2} = -5\frac{s+4}{(s+4)^2 + 3^2}$$

Da tabela: $\mathcal{L}\{\exp(-at)\cos(\beta t)u(t)\} = \dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$, então $y(t) = -5\exp(-4t)\cos(3t)u(t)$

$$x(t) = y(-t) = -5\exp(4t)\cos(-3t)u(-t) = -5\exp(4t)\cos(3t)u(-t)$$

4ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = \frac{7s^2 + 44s + 61}{(s+5)^2(s-3)}, \qquad -5 < \mathrm{Re}(s) < 3.$$

Solução:

$$X(s) = \frac{7s^2 + 44s + 61}{(s+5)^2(s-3)} = \frac{A}{(s+5)^2} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s-3}$$
$$A = (s+5)^2X(s)\big|_{s=-5} = \frac{7\cdot(-5)^2 + 44\cdot(-5) + 61}{-5-3} = \frac{175 - 220 + 61}{-8} = \frac{-45+61}{-8} = -2,$$
$$C = (s-3)X(s)|_{s=3} = \frac{7\cdot(3)^2 + 44\cdot(3) + 61}{(3+5)^2} = \frac{63 + 132 + 61}{64} = 4,$$
$$B + C = 7 \Rightarrow B = 7 - C = 3$$
$$X(s) = \underbrace{\frac{-2}{(s+5)^2} + \frac{3}{s+5}}_{X_1(s),\mathrm{Re(s)>-5}} \quad \underbrace{+\frac{4}{s-3}}_{X_2(s),\mathrm{Re}(s)<3}$$
$$Y_2(s) = X_2(-s), \qquad \mathrm{Re}(-s) < 3 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) > -3$$
$$Y_2(s) = \frac{4}{(-s-3)} = -\frac{4}{s+3}$$
$$y_2(t) = -4\exp(-3t)u(t) \Rightarrow x_2(t) = y_2(-t) = -4\exp(3t)u(-t)$$
$$x_1(t) = (-2t+3)\exp(-5t)u(t)$$
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (-2t+3)\exp(-5t)u(t) - 4\exp(3t)u(-t)$$

5ª Questão: Determine para a equação diferencial abaixo:

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 18\mathrm{sen}(3t), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

a) A parcela forçada da solução $y_f(t)$;

Solução: a) Para saber se há ressonância, primeiramente é necessário calcular a solução da equação característica a fim de obter os modos próprios. $D(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j3,\ \lambda_2 = -j3$. Por outro lado, $x(t) = 18\mathrm{sen}(3t) = 18\left(\frac{1}{2j}\exp(j3t) - \frac{1}{2j}\exp(-j3t)\right)$ o que implica em $\gamma_1 = j3$, $\gamma_2 = -j3$, ou seja, ambos modos forçados entram em ressonância com os modos próprios.

$$y_h(t) = a_1\exp(j3t) + a_2\exp(-j3t) \Rightarrow y_f(t) = b_1 t\exp(j3t) + b_2 t\exp(-j3t)$$

ou ainda usando funções trigonométricas:

$$y_h(t) = a_1\cos(3t) + a_2\mathrm{sen}(3t)$$
$$\Rightarrow y_f(t) = b_1 t\cos(3t) + b_2 t\mathrm{sen}(3t)$$

Para substituir a parcela forçada na equação diferencial original, temos que calcular as derivadas

$$\dot{y}_f(t) = b_1\cos(3t) - 3b_1 t\mathrm{sen}(3t) + b_2\mathrm{sen}(3t) + 3b_2 t\cos(3t) = (b_1 + 3b_2 t)\cos(3t) + (b_2 - 3b_1 t)\mathrm{sen}(3t)$$
$$\ddot{y}_f(t) = 3b_2\cos(3t) - 3(b_1 + 3b_2 t)\mathrm{sen}(3t) - 3b_1\mathrm{sen}(3t) + 3(b_2 - 3b_1 t)\cos(3t)$$
$$\Rightarrow \ddot{y}_f(t) = (6b_2 - 9b_1 t)\cos(3t) - (6b_1 + 9b_2 t)\mathrm{sen}(3t)$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\ddot{y}_f(t) + 9y_f(t) = (6b_2 - 9b_1 t)\cos(3t) - (6b_1 + 9b_2 t)\mathrm{sen}(3t) + 9b_1 t\cos(3t) + 9b_2 t\mathrm{sen}(3t) = 18\mathrm{sen}(3t)$$
$$\Rightarrow -6b_1 = 18 \Rightarrow b_1 = -3$$
$$\Rightarrow 6b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0$$
$$\Rightarrow y_f(t) = -3t\cos(3t).$$

b) A solução completa $y(t) = y_h(t) + y_f(t)$;

Solução: b)

$$y(t) = y_h(t) + y_f(t) = a_1 \cos(3t) + a_2\text{sen}(3t) - 3t\cos(3t)$$
$$y(0) = 0 = a_1 \cos(3 \cdot 0) + a_2\text{sen}(3 \cdot 0) - 3 \cdot 0 \cos(3 \cdot 0) \Rightarrow a_1 = 0$$
$$\dot{y}(0) = 0 = 3a_2 \cos(3 \cdot 0) - 3\cos(3 \cdot 0) + 9 \cdot 0 \cdot \text{sen}(3 \cdot 0) = 3a_2 - 3 \Rightarrow a_2 = 1.$$
$$\Rightarrow y(t) = \text{sen}(3t) - 3t\cos(3t)$$

c) A equação homogênea $\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$ equivalente e as condições iniciais necessárias para resolvê-la.

Solução: c)

$$\bar{D}(p) = (p - \gamma_1)(p - \gamma_2) = (p - j3)(p + j3) = (p^2 + 9),$$
$$\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0 \Rightarrow (p^2 + 9)^2 y(t) = 0.$$

Como há 2 modos forçados, precisamos de mais 2 condições iniciais ($\ddot{y}(0)$ e $\dddot{y}(0)$) que vão ser obtidas a partir da equação diferencial original:

$$\ddot{y}(0) = 18\text{sen}(3 \cdot 0) - 9y(0) = 0$$
$$\dddot{y}(0) = 3 \cdot 18\text{cos}(3 \cdot 0) - 9\dot{y}(0) = 54.$$

6ª Questão: a) Determine a equação diferencial homogênea ordinária linear a coeficientes constantes e as condições iniciais que produzem a mesma solução $y(t)$ que a equação diferencial não homogênea abaixo (1,0 ponto)

$$(p + 2)y = 10t\exp(2t), \quad y(0) = 1.$$

Solução: a) Para saber se há ressonância, primeiramente é necessário calcular a solução da equação característica a fim de obter os modos próprios. $D(\lambda) = \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$. Por outro lado, $x(t) = 10t\exp(2t) = 0\exp(2t) + 10t\exp(2t)$ o que implica em $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, ou seja, há ressonância entre os modos forçados mas não com o modo próprio. O polinômio aniquilador seria dado por

$$\bar{D}(p) = (p - \gamma_1)(p - \gamma_2) = (p - 2)^2, \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0 \Rightarrow (p - 2)^2(p + 2)y(t) = 0.$$

Como há 2 modos forçados, precisamos de mais 2 condições iniciais ($\dot{y}(0)$ e $\ddot{y}(0)$) que vão ser obtidas a partir da equação diferencial original:

$$\dot{y}(0) + 2y(0) = 10 \cdot 0 \cdot \exp(2 \cdot 0) \Rightarrow \dot{y}(0) = -2y(0) = -2.$$
$$\ddot{y}(0) = -2\dot{y}(0) + 10\exp(2 \cdot 0) + 2 \cdot 10 \cdot 0 \cdot \exp(2 \cdot 0) = 4 + 10 = 14.$$

b) Determine a solução forçada da equação diferencial.

Solução: Como não há ressonância com os modos próprios, a solução forçada é dada por

$$y_f(t) = b_1\exp(2t) + b_2 t\exp(2t)$$

Para calcular os coeficientes, basta substituir $y_f(t)$ na equação diferencial, nesse caso é necessário calcular a derivada

$$\dot{y}_f(t) = 2b_1\exp(2t) + b_2\exp(2t) + 2b_2 t\exp(2t) = (2b_1 + b_2)\exp(2t) + 2b_2 t\exp(2t)$$

Substituindo na equação diferencial, tem-se

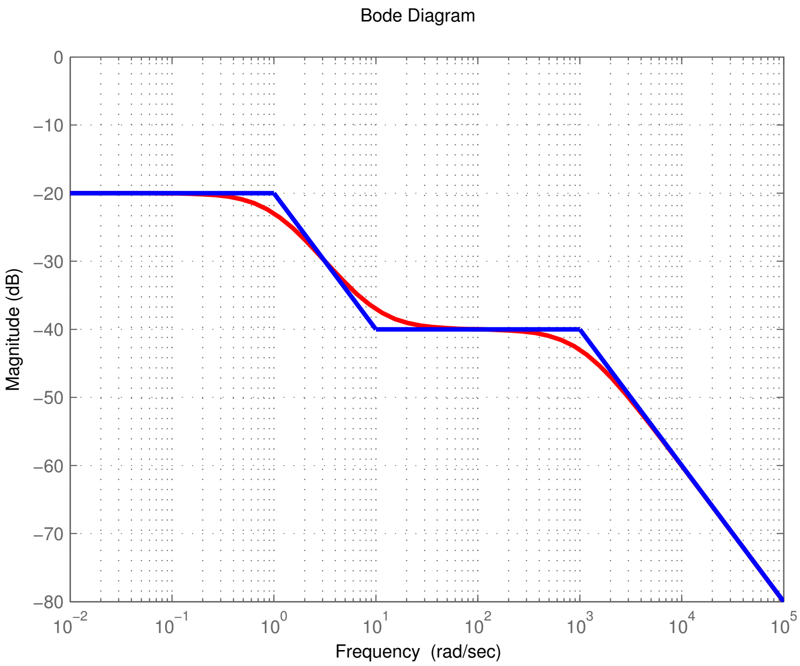
$$\dot{y}_f(t) + 2y_f(t) = 10t\exp(2t)$$
$$(2b_1 + b_2)\exp(2t) + 2b_2 t\exp(2t) + 2b_1\exp(2t) + 2b_2 t\exp(2t) = 10t\exp(2t)$$
$$\begin{cases} 4b_1 + b_2 = 0 \Rightarrow \qquad b_1 = -\dfrac{b_2}{4} = -\dfrac{5}{8} \\ 4b_2 = 10 \Rightarrow b_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$
$$y_f(t) = \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{2}t\right)\exp(2t)$$

c) Determine a solução completa da equação diferencial.

Solução:

$$y_h(t) = a_1\exp(-2t)$$
$$y(t) = y_h(t) + y_f(t) = a_1\exp(-2t) + \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{2}t\right)\exp(2t)$$
$$y(0) = 1 = a_1\exp(-2\cdot 0) + \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{2}\cdot 0\right)\exp(2\cdot 0) = a_1 - \frac{5}{8} \Rightarrow a_1 = \frac{13}{8}.$$
$$y(t) = \frac{13}{8}\exp(-2t) + \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{2}t\right)\exp(2t)$$

$7^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine a função de transferência racional e esboce o diagrama assintótico de fase do sistema de fase mínima cujo módulo da resposta em frequência é dado pelo diagrama abaixo



Solução:

- Como o gráfico começa constante, não há polos ou zeros na origem;
- O ganho associado é calculado pelo módulo na frequência $\omega = 10^0$, ou seja, $M_{dB}(10^0) = -20$:

$$20\log(k) = -20 \Rightarrow k = 10^{-20/20} = 0,1;$$

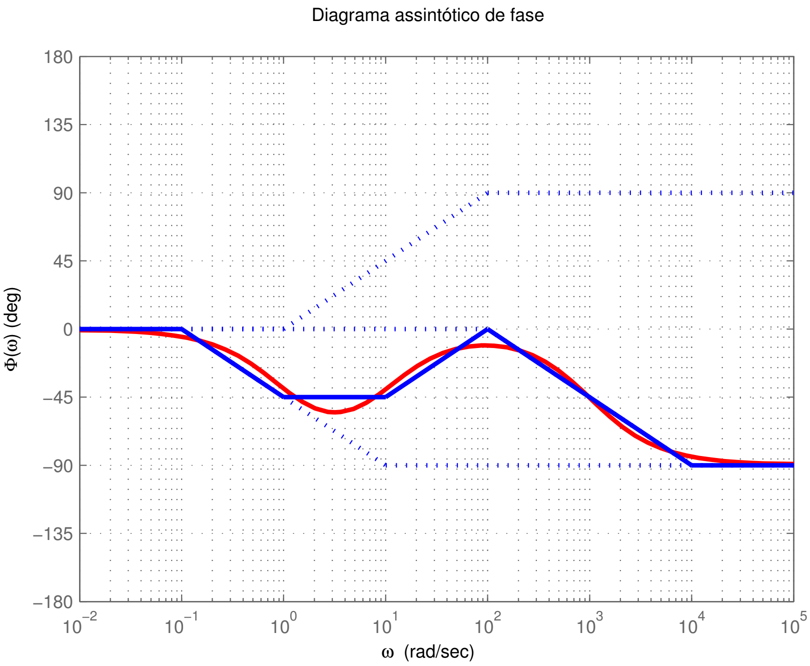
- Os pontos de inflexão nos permitem inferir os polos e zeros:
  - Em 10^0 o ângulo passa de 0dB/década para -20dB/década indicando a presença de um polo:
  $$\frac{\omega_c}{s+\omega_c} = \frac{10^0}{s+10^0} = \frac{1}{s+1}$$
  - Em 10^1 o ângulo passa de -20dB/década para 0dB/década indicando a presença de um zero:
  $$\frac{s+\omega_c}{\omega_c} = \frac{s+10}{10}$$
  - Em 10^3 o ângulo passa de 0dB/década para -20dB/década indicando a presença de um polo:
  $$\frac{\omega_c}{s+\omega_c} = \frac{10^3}{s+10^3} = \frac{1000}{s+1000}$$

Multiplicando todas as componentes, tem-se

$$H(s) = 0,1\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+10}{10}\cdot\frac{1000}{s+1000} = \frac{10(s+10)}{(s+1)(s+1000)}.$$

Para montar o gráfico de fase usamos a seguinte tabela (lembrando que os ganhos contribuem com 0°, os polos com -90° e os zeros com 90° a partir de uma década após a frequência de corte):

ω	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}
$\angle\frac{1}{s+1}$	0	0	-45°	-90°	-90°	-90°	-90°	-90°
$\angle\frac{s+10}{10}$	0	0	0	+45°	+90°	+90°	+90°	+90°
$\angle\frac{1000}{s+1000}$	0	0	0	0	0	-45°	-90°	-90°
$\angle H(s)$	0	0	-45°	-45°	0	-45°	-90°	-90°



b) A partir do diagrama de módulo apresentado na letra a) dessa questão, determine a relação sinal-ruído $(S/N)_{dB}$ na saída do sistema para a seguinte entrada

$$x(t) = \underbrace{100\cos(t)}_{\text{sinal}} + \underbrace{\text{sen}(100t)}_{\text{ruído}}.$$

Solução:
Na frequência $\omega = 1$ o ganho é de $-20dB$ o que corresponde a $M = 10^{-20/20} = 0,1$ e a fase é de -45^o.
Na frequência $\omega = 100$ o ganho é de $-40dB$ o que corresponde a $M = 10^{-40/20} = 0,01$ e a fase é de 0^o.
A saída forçada ou em regime permanente seria dada por:

$$y_f(t) = 100 \cdot 0,1\cos(t-45) + 1 \cdot 0,01\text{sen}(100t+0) = \underbrace{10\cos(t-45)}_{\text{sinal}} + \underbrace{0,01\text{sen}(100t)}_{\text{ruído}}$$

Então, a relação sinal-ruído é dada por:

$$(S/N)_{dB} = \left(\frac{10}{0,01}\right)_{dB} = 20\log(1000) = 60dB.$$