Nome: .... **RA:** ....

Atividade Extra-Classe (valendo 0,5 **ponto extra na Prova 2):**

- O exercício proposto a seguir deverá ser feito individualmente, à mão, e entregue com todos os passos necessários para compreensão do desenvolvimento.

1ª Questão: Resolva a seguinte equação a diferenças:

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 3y[n] = 2x[n+1] - 3x[n], \qquad y[0] = 0, \qquad y[1] = 1, \qquad x[n] = 2(-3)^n$$

utilizando

a) Transformada Z;

b) Pelo método dos coeficientes a determinar

i) Encontrando o polinômio aniquilador $\bar{D}(p)$ e as demais condições iniciais necessárias e determinando os coeficientes a partir da equação homogênea resultante $\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$ e das condições iniciais;

ii) Encontrando a parcela forçada $y_f[n]$ e a parcela homogênea $y_h[n]$ separadamente após determinar os modos próprios e modos forçados (considerando possíveis ressonâncias) e combinando seus resultados.

Solução:

a) Multiplicando por $u[n]$ dos dois lados da expressão e aplicando a transformada $\mathcal{Z}$, tem-se:

$$z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] + 4zY(z) - 4zy[0] + 3Y(z) = 2zX(z) - 2zx[0] - 3X(z)$$
$$(z^2 + 4z + 3)Y(z) = z^2y[0] + zy[1] + 4zy[0] + (2z - 3)X(z) - 2zx[0]$$

Substituindo $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} = 2\dfrac{z}{z+3}$, $x[0] = 2$, e as condições iniciais de $y[n]$, tem-se

$$(z^2 + 4z + 3)Y(z) = z + (2z-3)\frac{2z}{z+3} - 4z = \frac{-3z(z+3) + 2z(2z-3)}{z+3} = \frac{z^2 - 15z}{z+3}$$
$$(z+1)(z+3)Y(z) = \frac{z^2 - 15z}{z+3} \Rightarrow Y(z) = \frac{z(z-15)}{(z+1)(z+3)^2}$$
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z-15}{(z+1)(z+3)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+3)^2} + \frac{C}{z+3}$$
$$z - 15 = A(z+3)^2 + B(z+1) + C(z+3)(z+1)$$
$$z = -1 : \qquad -1 - 15 = (-1+3)^2 A \Rightarrow A = \frac{-16}{4} = -4$$
$$z = -3 : \qquad -3 - 15 = (-3+1)B \Rightarrow A = \frac{-18}{-2} = 9$$
$$A + C = 0 \Rightarrow C = -A = 4$$
$$Y(z) = -4\frac{z}{z+1} + 9\frac{z}{(z+3)^2} + 4\frac{z}{z+3}$$
$$y[n] = [-4(-1)^n + 9n(-3)^{n-1} + 4(-3)^n]u[n] = [-4(-1)^n + n(-3)^{n+1} + 4(-3)^n]u[n]$$

b-i) Primeiramente determinamos os modos forçados pela entrada para calcular o polinômio aniquilador:

$$x[n] = 2(-3)^n \Rightarrow \gamma = -3 \Rightarrow \bar{D}(p) = p - \gamma = p - (-3) = p + 3$$

Como há apenas um modo forçado precisamos calcular apenas uma condição inicial a mais, além das já fornecidas, ou seja, $y[2]$. Para isso, fazendo $n = 0$ na equação a diferenças, tem-se:

$$y[2] + 4y[1] + 3y[0] = 2x[1] - 3x[0]$$
$$y[2] = -4y[1] - 3y[0] + 2(2(-3)^1) - 3(2(-3)^0) = -4 - 12 - 6 = -22.$$

Finalmente, reescrevendo a equação a diferenças original como uma equação homogênea ($\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$), tem-se

$$(p+3)(p^2+4p+3)y[n] = 0 \Rightarrow (p+3)^2(p+1)y[n] = 0, \qquad y[0] = 0,\ y[1] = 1,\ y[2] = -22.$$

Observe que há dois modos associados a -3 e um modo associado a -1, assim a solução é composta por:

$$y[n] = a_1(-3)^n + a_2 n(-3)^n + a_3(-1)^n$$

Substituindo as condições iniciais:

$$y[0] = 0 = a_1 + a_3 \Rightarrow a_1 = -a_3$$
$$y[1] = 1 = -3a_1 - 3a_2 - a_3 \Rightarrow 3a_3 - 3a_2 - a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1-2a_3}{-3}$$
$$y[2] = -22 = 9a_1 + 18a_2 + a_3 \Rightarrow -9a_3 - 6 + 12a_3 + a_3 = -22 \Rightarrow 4a_3 = -16 \Rightarrow a_3 = -4$$
$$a_1 = -(-4) = 4, \qquad a_2 = \frac{1-2(-4)}{-3} = \frac{9}{-3} = -3$$

Assim

$$y[n] = 4(-3)^n - 3n(-3)^n - 4(-1)^n = 4(-3)^n + n(-3)^{n+1} - 4(-1)^n$$

b-ii) Primeiramente determinamos os modos próprios para tentar descobrir se haverá ressonância com os modos forçados:

$$D(p) = p^2 + 4p + 3 = (p+1)(p+3) \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3 \Rightarrow y_h[n] = a_1(-1)^n + a_2(-3)^n$$

Agora descobrimos os modos forçados pela entrada:

$$x[n] = 2(-3)^n \Rightarrow \gamma = -3 \Rightarrow \text{Como há ressonância: } \Rightarrow y_f[n] = bn(-3)^n$$

Substituindo $y_f[n]$ na equação a diferenças original, tem-se:

$$y_f[n+2] + 4y_f[n+1] + 3y_f[n] = 2x[n+1] - 3x[n]$$

em que

$$y_f[n+2] = b(n+2)(-3)^{n+2} = 9b(n+2)(-3)^n = 9bn(-3)^n + 18b(-3)^n$$
$$y_f[n+1] = b(n+1)(-3)^{n+1} = -3b(n+1)(-3)^n = -3bn(-3)^n - 3b(-3)^n$$
$$y_f[n] = bn(-3)^n$$
$$x[n+1] = 2(-3)^{n+1} = -6(-3)^n$$
$$x[n] = 2(-3)^n$$

Substituindo na equação a diferenças:

$$9bn(-3)^n + 18b(-3)^n - 12bn(-3)^n - 12b(-3)^n + 3bn(-3)^n = -12(-3)^n - 6(-3)^n = -18(-3)^n$$
$$(9b - 12b + 3b)n(-3)^n + (18b - 12b) = -18(-3)^n$$
$$6b = -18 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow y_f[n] = -3n(-3)^n$$

Reescrevendo a solução completa, tem-se

$$y[n] = y_f[n] + y_h[n] = -3n(-3)^n + a_1(-1)^n + a_2(-3)^n$$

Substituindo as condições iniciais:

$$y[0] = 0 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_1 = -a_2$$
$$y[1] = 1 = 9 - a_1 - 3a_2 \Rightarrow a_2 - 3a_2 = -8 \Rightarrow a_2 = \frac{-8}{-2} = 4$$
$$a_1 = -4$$

Assim

$$y[n] = -3n(-3)^n - 4(-1)^n + 4(-3)^n = 4(-3)^n + n(-3)^{n+1} - 4(-1)^n$$