Nome: .... **RA:** ....

Atividade Extra-Classe (valendo pontuação extra na prova):

- O exercício proposto a seguir deverá ser feito individualmente, à mão, e entregue com todos os passos necessários para compreensão do desenvolvimento.

1ª Questão: Utilizando a transformada unilateral de Laplace, determine $y(t)$ para as seguintes equações diferenciais:

a) Homogênea:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 0, \qquad y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 13;$$

b) Não-homogênea:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{x}(t) + 2x(t), \qquad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = 4, \qquad x(t) = (5 + \exp(-t))u(t).$$

Observação: No item b) separe sua resposta nas parcelas devido à entrada nula e devido às condições iniciais nulas e desenvolva-as separadamente antes de somar e apresentar o resultado.

Solução:

a)

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 6(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 0$$
$$(s^2 + 6s + 5)Y(s) = y(0)s + \dot{y}(0) + 6y(0) = -s + 13 - 6 = -s + 7$$
$$Y(s) = \frac{-s+7}{(s+1)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+5}$$
$$A = (s+1)Y(s)|_{s=-1} = \frac{7+1}{5-1} = 2$$
$$B = (s+5)Y(s)|_{s=-5} = \frac{7+5}{1-5} = -3$$
$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+5}$$
$$y(t) = [2\exp(-t) - 3\exp(-5t)]u(t)$$

b)

$$X(s) = \mathcal{L}\{(5 + \exp(-t))u(t)\} = \frac{5}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{6s+5}{s(s+1)}, \qquad x(0) = 5 + 1 = 6;$$
$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + sY(s) - y(0) = sX(s) - x(0) + 2X(s)$$
$$(s^2 + s)Y(s) = y(0)s + \dot{y}(0) + y(0) + (s+2)X(s) - x(0)$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{5s+9}{s(s+1)}}_{Y_{en}} + \underbrace{\frac{(s+2)}{s(s+1)}\frac{6s+5}{s(s+1)}}_{Y_{ci}} - \underbrace{\frac{6}{s(s+1)}}_{Y_{x_0}}$$
$$Y_{en}(s) = \frac{5s+9}{s(s+1)} = \frac{A1}{s} + \frac{A2}{s+1}$$
$$A1 = sY_{en}(s)|_{s=0} = 9$$
$$A2 = (s+1)Y_{en}(s)|_{s=-1} = -4$$
$$Y_{en}(s) = \frac{9}{s} - \frac{4}{s+1}$$
$$y_{en}(t) = [9 - 4\exp(-t)]u(t)$$

$$
\begin{gathered}
Y_{x_0}(s) = \frac{-6}{s(s+1)} = \frac{B1}{s} + \frac{B2}{s+1} \\
B1 = \left. sY_{x_0}(s)\right|_{s=0} = -6 \\
B2 = \left.(s+1)Y_{x_0}(s)\right|_{s=-1} = 6 \\
Y_{x_0}(s) = -\frac{6}{s} + \frac{6}{s+1} \\
y_{x_0}(t) = [-6 + 6\exp(-t)]u(t) \\
Y_{ci}(s) = \frac{6s^2+17s+10}{s^2(s+1)^2} = \frac{C1}{s^2} + \frac{C2}{s} + \frac{C3}{(s+1)^2} + \frac{C4}{s+1} \\
C1 = \left. s^2 Y_{ci}(s)\right|_{s=0} = 10 \\
C3 = \left.(s+1)^2 Y_{ci}(s)\right|_{s=-1} = -1 \\
6s^2+17s+10 = C1(s+1)^2 + C2s(s+1)^2 + C3s^2 + C4s^2(s+1) \\
6s^2+17s+10 = 10s^2+20s+10+C2s^3+2C2s^2+C2s-s^2+C4s^3+C4s^2 \\
s^3: \quad C2 + C4 = 0 \Rightarrow C4 = -C2 \\
s^1: \quad 20 + C2 = 17 \Rightarrow C2 = -3 \Rightarrow C4 = 3 \\
Y_{ci}(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{3}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1} \\
y_{ci}(t) = [10t - 3 - t\exp(-t) + 3\exp(-t)]u(t)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \underbrace{(10t - 3 - t\exp(-t) + 3\exp(-t))u(t)}_{y_{ci}} + \underbrace{(9 - 4\exp(-t))u(t)}_{y_{en}} + \underbrace{(-6 + 6\exp(-t))u(t)}_{y_{x_0}} \\
&= (10t - t\exp(-t) + 5\exp(-t))u(t).
\end{aligned}
$$