Exercício 1. Considere o sistema linear invariante no tempo (SLIT) descrito pela seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 4x$$

a) Determine a função de transferência $H(s)$;
b) Determine a solução forçada para a entrada $x(t) = 5 - \exp(-3t)$;
c) Determine a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$;
d) Determine a resposta ao degrau $y(t) = \mathcal{G}\{u(t)\}$;
e) Determine o valor da integral $\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt$.

Exercício 2. Determine a transformada inversa de Laplace da função:

$$X(s) = \frac{9s + 5}{(s+1)^2(s-3)}$$

Para os seguintes domínios:

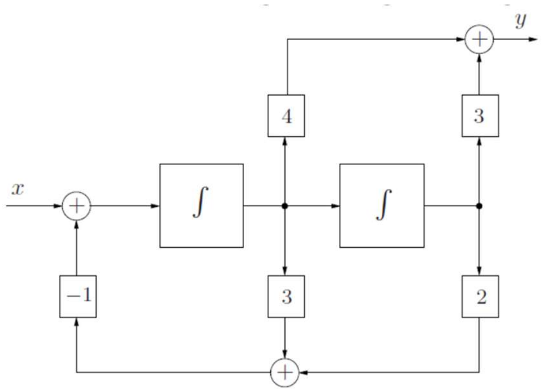
a) $\mathcal{R}e(s) > 3$ b) $\mathcal{R}e(s) < -1$ c) $-1 < \mathcal{R}e(s) < 3$

Exercício 3. Determine $x(t)$ cuja transformada de Laplace é $X(s) = \frac{6}{(s-2)^4}, \mathcal{R}e(s) < 2$.

Exercício 4. Calcule a transformada inversa de: $X(s) = \frac{5s-3}{s^2+2s+17}, \mathcal{R}e(s) > -1$.

Exercício 5. Determine a transformada inversa de: $X(s) = \frac{8s-16}{s^2(s+4)}, \mathcal{R}e(s) > 0$.

Exercício 6. Determine para o sistema abaixo:



a) A função de transferência $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.
b) A resposta ao impulso $h(t)$.
c) O tempo de propagação $t_p = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt}$

Degrau: $u(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$	**Impulso:** $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$,	$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$

Auto-função para SLIT: $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s)\exp\,(st)$,

$x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)\cos\,(\omega t + \angle H(j\omega))$

$x(t) = \mathrm{sen}(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)\mathrm{sen}\,(\omega t + \angle H(j\omega))$

em que $H(s) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=s}$ é a função de transferência do SLIT descrito pela equação diferencial: $D(p)y = N(p)x$.

Definição da Transformada bilateral de Laplace: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt\,,\ \ s \in \Omega_x$

Tabela de transformadas:			**Propriedades da transformada bilateral de Laplace:**		
$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{X(s)}$	$\boldsymbol{s \in \Omega_x}$	$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{X(s)}$	$\boldsymbol{s \in \Omega_x}$
Impulso: $\delta(t)$	1	$s \in \mathbb{C}$	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$s \in \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$
Degrau: $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$	$x(t-\tau)$	$X(s)\exp\,(-s\tau)$	$s \in \Omega_x$
Rampa: $tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$	$\Omega_{x+y} \supset \Omega_x \cap \Omega_y$
$\frac{t^m}{m!}u(t)$	$\frac{1}{s^{m+1}}$	$Re(s) > 0$	$\int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\Omega_y \supset \Omega_x \cap Re(s) > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) > 0$	$\exp\,(-at)x(t)$	$X(s+a)$	$(s+a) \in \Omega_x$
$\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$Re(s+a) > 0$	$t^m x(t)$	$(-1)^m\frac{d^m X(s)}{ds^m}$	$\Omega_y = \Omega_x$
$\cos(\beta t)u\,(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$Re(s) > 0$	$x(-t)$	$X(-s)$	$-s \in \Omega_x$
$\mathrm{sen}(\beta t)u\,(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$Re(s) > 0$	$-\exp(-at)\,u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) < 0$
$\exp\,(-at)\cos(\beta t)u\,(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$Re(s+a) > 0$	$\dot{x}(t)$	$sX(s)$	$\Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$
$\exp(-at)\mathrm{sen}(\beta t)u\,(t)$	$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$Re(s+a) > 0$	**Área da Função:** $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(0)$ se $s = 0 \in \Omega_x$		

Definição da Transformada unilateral de Laplace: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)exp(-st)dt\,,\ \ s \in \Omega_x$

$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$	$sX(s) - x(0)$	**Teorema do Valor inicial:** $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot X(s)$
$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}$	$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$	
$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m}{dt^m}x(t) = x^{(m)}(t)\right\}$	$s^m X(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$	**Teorema do Valor final:** $x(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot X(s)$

Solução

Exercício 1. Considere o sistema linear invariante no tempo (SLIT) descrito pela seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 4x$$

a) Determine a função de transferência $H(s)$;

$$H(s) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=s} \quad \text{para } D(p)y = N(p)x \Rightarrow (p^2 + 4p + 4)y = (3p + 4)x$$

Então $H(s) = \frac{3s+4}{(s^2+4s+4)}$,

b) Determine a solução forçada para a entrada $x(t) = 5 - \exp(-3t)$;

Usando o conceito de auto-função: $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s)\exp(st)$. Nesse caso, $x(t) = 5\exp(0t) - 1\exp(-3t) \Rightarrow y_f(t) = 5H(0)\exp(0t) - 1H(-3)\exp(-3t)$.

$H(0) = \frac{4}{4} = 1$ e $H(-3) = \frac{-9+4}{9-12+4} = -\frac{5}{1} = -5$, consequentemente:

$$y(t) = 5\exp(0t) - (-5)\exp(-3t) = 5 + 5\exp(-3t)$$

c) Determine a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$;

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, em que $H(s) = \frac{3s+4}{(s+2)^2}$, pois as raízes do denominador (polos) são calculadas pela fórmula de Bháskara: $s = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2} = -2$.

Decompondo em frações parciais: $H(s) = \frac{3s+4}{(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2} \Rightarrow 3s + 4 = A + B(s+2)$

$$\text{Para } s = -2: \quad 3(-2) + 4 = A \Rightarrow A = -6 + 4 = -2$$

$$\text{Para } s = 0: \quad 3(0) + 4 = -2 + 2B \Rightarrow B = \frac{6}{2} = 3$$

$$H(s) = -2\frac{1}{(s+2)^2} + 3\frac{1}{s+2} \Rightarrow$$

Pela tabela de transformadas tem-se $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$ e $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(s+a)}$

Então: $h(t) = -2t\exp(-2t)u(t) + 3\exp(-2t)\,u(t)$.

d) Determine a resposta ao degrau $y(t) = \mathcal{G}\{u(t)\}$;

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s) = H(s)U(s) = H(s)/s\}$, em que:

$$Y(s) = \frac{3s+4}{s(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s} \Rightarrow 3s + 4 = As + Bs(s+2) + C(s+2)^2$$

$$\text{Para } s = -2: \quad 3(-2) + 4 = A(-2) \Rightarrow A = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$\text{Para } s = 0: \quad 3(0) + 4 = 4C \Rightarrow C = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{Para } s = 1: \quad 3(1) + 4 = A + B(1+2) + C(1+2)^2 \Rightarrow 7 = 1 + 9 + 3B \Rightarrow B = -\frac{3}{3} = -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}$$

Pela tabela tem-se $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}e^{-a}\ u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$, $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(s+a)}$

Então: $y(t) = t\exp(-2t)u(t) - \exp(-2t)\,u(t) + u(t) = ((t-1)\exp(-2t) + 1)u(t)$.

e) Determine o valor da integral $\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt$.

Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(0)$, então:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt &= -\frac{d}{ds}H(s)\bigg|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3s+4}{(s+2)^2}\right)_{s=0} \\ &= -\left[\frac{3(s+2)^2 - 2(s+2)(3s+4)}{(s+2)^4}\right]_{s=0} = -\left(\frac{3\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot 4}{2^4}\right) \\ &= -\left(-\frac{4}{16}\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exercício 2. Determine a transformada inversa de Laplace da função:

$$X(s) = \frac{9s+5}{(s+1)^2(s-3)}$$

Para os seguintes domínios:

a) $\mathcal{R}e(s) > 3$ b) $\mathcal{R}e(s) < -1$ c) $-1 < \mathcal{R}e(s) < 3$

Fazendo expansão por frações parciais:

$$X(s) = \frac{9s+5}{(s+1)^2(s-3)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-3} \Rightarrow$$

$$9s + 5 = A(s-3) + B(s-3)(s+1) + C(s+1)^2$$

$$\text{Para } s = 3: \quad 9(3) + 5 = C(3+1)^2 \Rightarrow C = \frac{32}{16} = 2$$

$$\text{Para } s = -1: \quad 9(-1) + 5 = A(-1-3) \Rightarrow A = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\text{Para } s = 0: \quad 9(0) + 5 = 1(-3) + B(-3)(1) + 2(1)^2 \Rightarrow B = \frac{6}{-3} = -2$$

$$X(s) = \frac{9s+5}{(s+1)^2(s-3)} = \frac{1}{(s+1)^2} - 2\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s-3}$$

Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}e^{-a}\ u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$, $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(s+a)}$, $\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s), -s \in \Omega_x$ então:

a) $x(t) = [(t-2)\exp(-t) + 2\exp(3t)]u(t)$
b) $x(t) = [(-t+2)\exp(-t) - 2\exp(3t)]u(-t)$
c) $x(t) = (t-2)\exp(-t)u(t) - 2\exp(3t)u(-t)$

Exercício 3. Determine $x(t)$ cuja transformada de Laplace é $X(s) = \frac{6}{(s-2)^4}, \mathcal{R}e(s) < 2$.

Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$ e $\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s), -s \in \Omega_x$ então:

$$Y(s) = X(-s) = \frac{6}{(s+2)^4}, \mathcal{R}e(-s) < 2 \Rightarrow \mathcal{R}e(s) > -2$$

$$y(t) = \frac{6t^3}{3!}\exp(-2t)u(t) \Rightarrow x(t) = y(-t) = -t^3\exp(2t)\,u(-t)$$

Exercício 4. Calcule a transformada inversa de: $X(s) = \frac{5s-3}{s^2+2s+1}, \mathcal{R}e(s) > -1$.

Calculando os polos pela fórmula de Bháskara:

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 17}}{2} = -1 \pm j4 \Rightarrow (s+1)^2 + 4^2$$

Quando temos parte complexa conjugada na raiz do denominador, esse trecho corresponde a sen e cos, pela tabela: $\mathcal{L}\{e^{-a}\ \cos(\beta t)\,u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$ e $\mathcal{L}\{e^{-at}\,\mathrm{sen}(\beta t)\,u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$

$$X(s) = \frac{5s-3}{s^2+2s+17} = A\frac{s+1}{(s+1)^2+4^2} + B\frac{4}{(s+1)^2+4^2}$$

$$\Rightarrow As + A + 4B = 5s - 3 \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ 5 + 4B = -3 \Rightarrow B = -2 \end{cases}$$

$$x(t) = 5e^{-t}\cos(4t)\,u(t) - 2e^{-t}\,\mathrm{sen}(4t)\,u(t)$$

Exercício 5. Determine a transformada inversa de: $X(s) = \frac{8s-16}{s^2(s+4)}, \mathcal{R}e(s) > 0$.

$$X(s) = \frac{8s-16}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+4} \Rightarrow 8s - 16 = A(s+4) + Bs(s+4) + Cs^2$$

Para $s = -0$: $\quad 8(0) - 16 = A(4) \Rightarrow A = -\frac{16}{4} = -4$

Para $s = -4$: $\quad 8(-4) - 16 = C(-4)^2 \Rightarrow C = -\frac{48}{16} = -3$

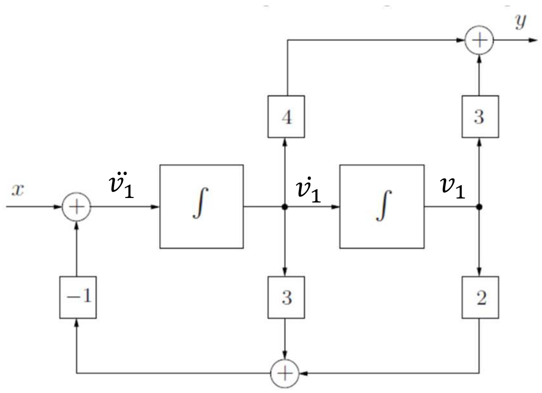
Para $s = 4$: $\quad 8(4) - 16 = -4(8) + B \cdot 4(8) - 3(4)^2 \Rightarrow 16 = -32 + 32B - 48 \Rightarrow B = \dfrac{96}{32} = 3$

$$X(s) = -4\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+4}$$

Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(s+a)}$ e $\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ então:

$$x(t) = (-4t + 3 - 3\exp(-4t))u(t)$$

Exercício 6. Determine para o sistema abaixo:



a) A função de transferência $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

b) A resposta ao impulso $h(t)$.

c) O tempo de propagação $t_p = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt}$

a)

$$y = 3v_1 + 4\dot{v}_1 \Rightarrow y = (4p+3)v_1$$

$$\ddot{v}_1 = -3\dot{v}_1 - 2v_1 + x \Rightarrow x = (p^2 + 3p + 2)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{x}{(p^2 + 3p + 2)}$$

$$y = \frac{(4p+3)}{(p^2 + 3p + 2)}x \Rightarrow D(p)y = N(p)x$$

$$H(s) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=s} = \frac{(4s+3)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{(4s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

b)

$$H(s) = \frac{(4s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \Rightarrow 4s + 3 = A(s+2) + B(s+1)$$

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 5$$

$$H(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{5}{s+2} \Rightarrow h(t) = (-\exp(-t) + 5\exp(-2t))u(t)$$

c) Pela tabela tem-se que $\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(0)$, então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = H(0) = \frac{3}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} th(t)dt = -\frac{d}{ds}H(s)\bigg|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{4s+3}{s^2+3s+2}\right)_{s=0}$$

$$= -\left[\frac{4(s^2+3s+2) - (2s+3)(4s+3)}{(s^2+3s+2)^2}\right]_{s=0} = -\left(\frac{4 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{2^2}\right) = \frac{1}{4}$$

Então $t_p = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$