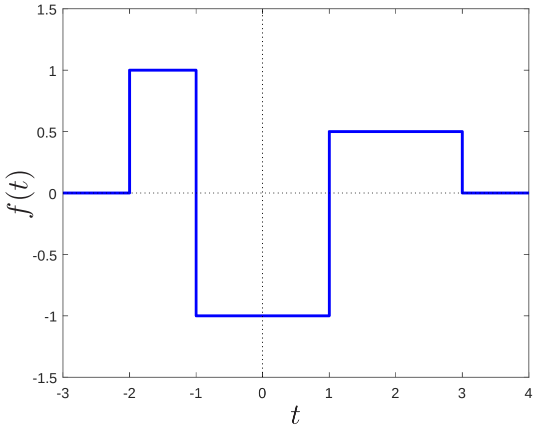
Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1ª Questão: a) Esboce $f(t) = G_4(t) - 2G_2(t) - 0.5G_1(t-1.5) + 0.5G_1(t-2.5)$. (0,5 ponto)

Solução:



1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

b)Determine e esboce $y(t) = x(-2t-2)$ em que $x(t) = f(t) * u(t)$ com $f(t)$ dada em (a). (1,0 ponto).

Solução: $x(t) = \mathcal{I}_f(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\beta)d\beta$ dada por

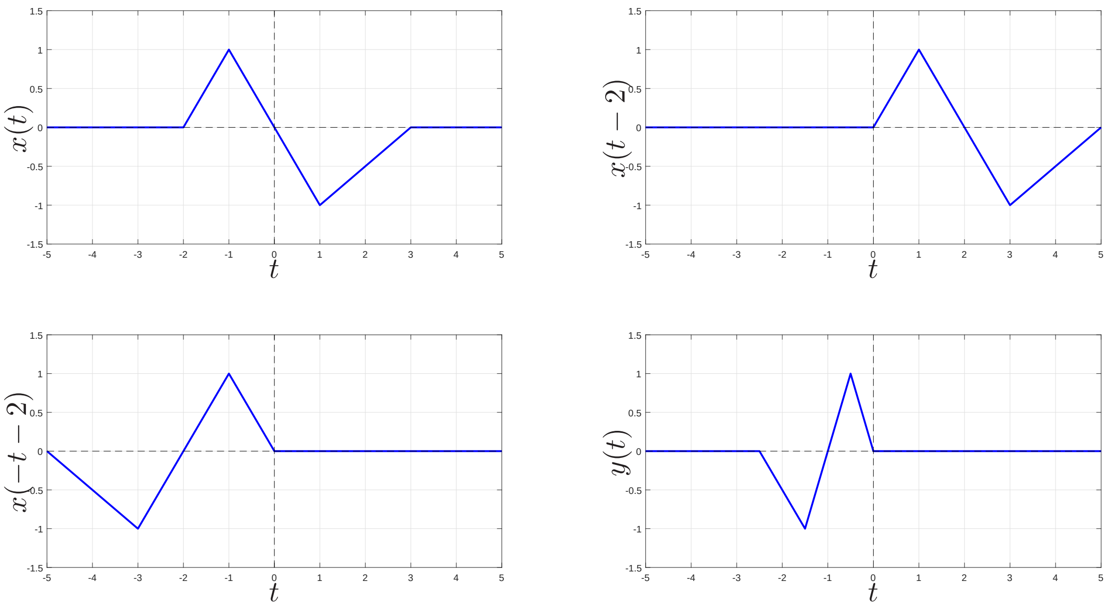
$t < -2$	$\int_{-\infty}^{t} 0d\beta = 0$
$-2 < t < -1$	$\int_{-\infty}^{-2} 0d\beta + \int_{-2}^{t} 1d\beta = t+2$
$-1 < t < 1$	$\int_{-\infty}^{-2} 0d\beta + \int_{-2}^{-1} 1d\beta + \int_{-1}^{t}(-1)d\beta = -t$
$1 < t < 3$	$\int_{-\infty}^{-2} 0d\beta + \int_{-2}^{-1} 1d\beta + \int_{-1}^{1}(-1)d\beta + \int_{1}^{t}(0.5)d\beta = \frac{t-3}{2}$
$t > 3$	$\int_{-\infty}^{-2} 0d\beta + \int_{-2}^{-1} 1d\beta + \int_{-1}^{1}(-1)d\beta + \int_{1}^{3}(0.5)d\beta + \int_{3}^{t} 0d\beta = 0$

$$x(t) = (t+2)G_1(t+1.5) - tG_2(t) + \left(\frac{t-3}{2}\right)G_2(t-2)$$

Por outro lado, $y(t) = x(-2t-2)$, substituindo t por $-2t-2$ na tabela acima tem-se

$-2t-2 < -2 \rightarrow t > 0$	$y(t) = 0$
$-2 < -2t-2 < -1 \rightarrow -1/2 < t < 0$	$y(t) = (-2t-2)+2 = -2t$
$-1 < -2t-2 < 1 \rightarrow -3/2 < t < -1/2$	$y(t) = -(-2t-2) = 2t+2$
$1 < -2t-2 < 3 \rightarrow -5/2 < t < -3/2$	$y(t) = \frac{(-2t-2)-3}{2} = \frac{-2t-5}{2} = -t-2.5$
$-2t-2 > 3 \rightarrow t < -5/2$	$y(t) = 0$

$$y(t) = -(t+2.5)G_1(t+2) + (2t+2)G_1(t+1) - 2tG_{0.5}(t+0.5)$$



2ª Questão: Considere o sistema $y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t+4}(t-\beta)x(\beta)d\beta$.

a) Determine a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$. (0,5 ponto)

Solução:

$$h(t) = \int_{t-1}^{t+4}(t-\beta)\delta(\beta)d\beta = \int_{-\infty}^{t+4}(t-\beta)\delta(\beta)d\beta - \int_{-\infty}^{t-1}(t-\beta)\delta(\beta)d\beta$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\beta)u(t+4-\beta)\delta(\beta)d\beta - \int_{-\infty}^{\infty}(t-\beta)u(t-1-\beta)\delta(\beta)d\beta$$

$$h(t) = t(u(t+4) - u(t-1)) = tG_5(t+1.5)$$

b) Classifique o sistema quanto a linearidade, invariância no tempo, BIBO estabilidade e causalidade justificando a resposta. (1,0 ponto)

Solução:
Linear e invariante no tempo pois $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\beta)h(t-\beta)d\beta = \int_{t-1}^{t+4}(t-\beta)x(\beta)d\beta = y(t)$.
Não causal pois $h(t) \neq 0$ para $t < 0$.
BIBO estável pois a resposta ao impulso é absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\beta)|d\beta = \int_{-4}^{0}(-\beta)d\beta + \int_{0}^{1}\beta d\beta = -(t^2/2)_{-4}^{0} + (t^2/2)_{0}^{1} = 8 + 1/2 = 8.5 < \infty.$$

3ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(s)$ do sistema $y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\}$ descrito pelas equações (0,5 ponto)

$$\dot{v}_2(t) = v_1(t), \qquad \dot{v}_1(t) = -6v_2(t) + 2x(t), \qquad y(t) = 3v_2(t).$$

Solução:
$pv_2 = v_1$ (1), $\quad pv_1 + 6v_2 = 2x$ (2), $\quad$ (1) em (2): $v_2 = \dfrac{2}{p^2+6}x$ (3)

Substituindo (3) em $y = 3v_2$ tem-se $y = \dfrac{6}{p^2+6}x$ implicando em $N(p) = 6$, $D(p) = s^2 + 6$, ou seja,

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{6}{s^2+6}.$$

b) Determine a saída forçada $y_f(t)$ do sistema para a entrada $x(t) = 4\cos^2(t)$. (0,5 ponto)

Solução:

$$x(t) = 4\cos^2(t) = 4\left(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right)^2 = 2 + e^{j2t} + e^{-j2t}$$

$$y_f(t) = 2H(0) + H(j2)e^{j2t} + H(-j2)e^{-j2t} = 2(1) + (3)e^{j2t} + (3)e^{-j2t} = 2 + 6\cos(2t).$$

$4^{\underline{a}}$ Questão: Determine os coeficientes α e β que minimizam o erro quadrático médio $<\epsilon^2(t)>$ da representação da função $x(t) = (t-2)G_4(t)$ na base formada por $f_1(t) = G_4(t)$ e $f_2(t) = -G_2(t-1)$ usando uma aproximação linear do tipo $x(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) + \epsilon(t)$.

Solução:

$$R = \begin{bmatrix} <f_1f_1> & <f_1f_2> \\ <f_2f_1> & <f_2f_2> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-2}^{2} 1dt & \int_0^2(-1)dt \\ \int_0^2(-1)dt & \int_0^2(-1)^2dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

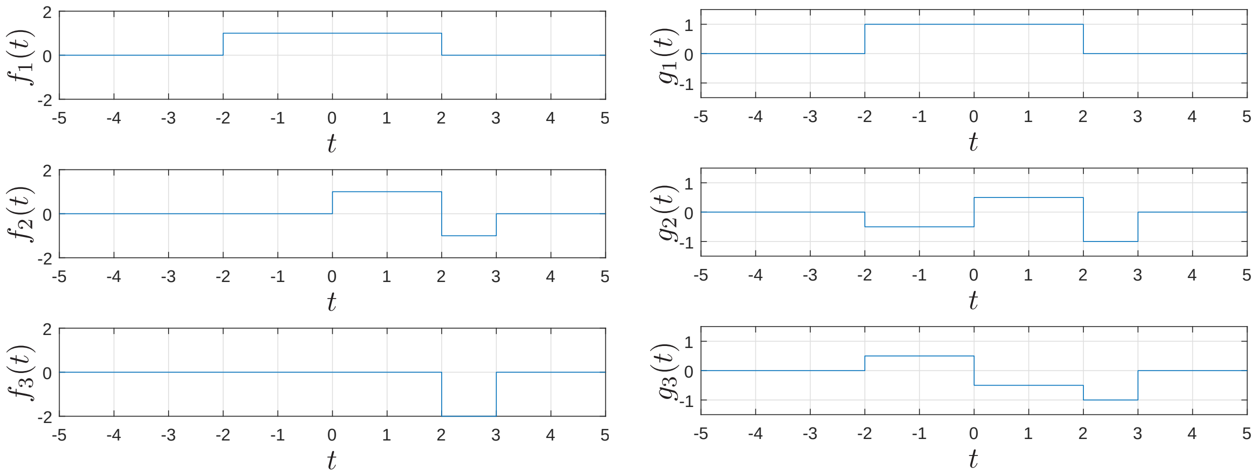
$$\begin{bmatrix} <f_1x> \\ <f_2x> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-2}^{2}(t-2)dt \\ -\int_0^2(t-2)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Big|_{-2}^{2} \\ -\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Big|_{0}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\times 2 - (-2)\times(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$5^{\underline{a}}$ Questão: Determine e esboce três sinais ortogonais $g_1(t)$, $g_2(t)$ e $g_3(t)$ que descrevem o mesmo espaço que $a_1f_1(t) + a_2f_2(t) + a_3f_3(t)$, com a_1, a_2 e a_3 reais, a partir dos sinais linearmente independentes (1,0 ponto)

$$f_1(t) = G_4(t), \quad f_2(t) = G_2(t-1) - G_1(t-2.5) \quad \text{e} \quad f_3(t) = -2G_1(t-2.5).$$

Solução:



$$g_1(t) = f_1(t) = G_4(t)$$

$$g_2(t) = f_2(t) - \frac{<f_2(t)g_1(t)>}{<g_1^2(t)>}g_1(t) = f_2(t) - \frac{\int_0^2 1dt}{\int_{-2}^2 1dt}g_1(t) = f_2(t) - \frac{1}{2}g_1(t)$$

$$g_2(t) = -0.5G_2(t+1) + 0.5G_2(t-1) - G_1(t-2.5).$$

$$g_3(t) = f_3(t) - \frac{<f_3(t)g_1(t)>}{<g_1^2(t)>}g_1(t) - \frac{<f_3(t)g_2(t)>}{<g_2^2(t)>}g_2(t) = f_3(t) - \frac{\int_2^3 1dt}{\int_{-2}^0 0.25dt + \int_0^2 0.25dt + \int_2^3 1dt}g_2(t)$$

$$g_3(t) = f_3(t) - g_2(t) = 0.5G_2(t+1) - 0.5G_2(t-1) - G_1(t-2.5).$$

6ª Questão: Considere o sinal periódico

$$x(t) = 2 - j + \exp\left(j\frac{5\pi}{3}t\right) + 6\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - j4\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}t\right).$$

a) Determine o período fundamental T de $x(t)$. (0,5 ponto)

Solução: $T_1 = \dfrac{2\pi}{5\pi/3} = \dfrac{6}{5}$, $T_2 = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 4$, $T_3 = \dfrac{2\pi}{4\pi/3} = \dfrac{3}{2}$, então o período fundamental é $T = 10T_1 = 3T_2 = 8T_3 = 12$.

b) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de $x(t)$. (1,0 ponto)

Solução: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$.

$$x(t) = (2-j)\exp\left(j0\frac{\pi}{6}t\right) + 1\exp\left(j10\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{6}{2}\exp\left(j3\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{6}{2}\exp\left(-j3\frac{\pi}{6}t\right) - \frac{j4}{j2}\exp\left(j8\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{j4}{j2}\exp\left(-j8\frac{\pi}{6}t\right).$$

$c_0 = 2 - j$, $c_3 = c_{-3} = 3$, $c_8 = -2$, $c_{-8} = 2$, $c_{10} = 1$.

c) Determine a potência média de $x(t)$. (0,5 ponto)

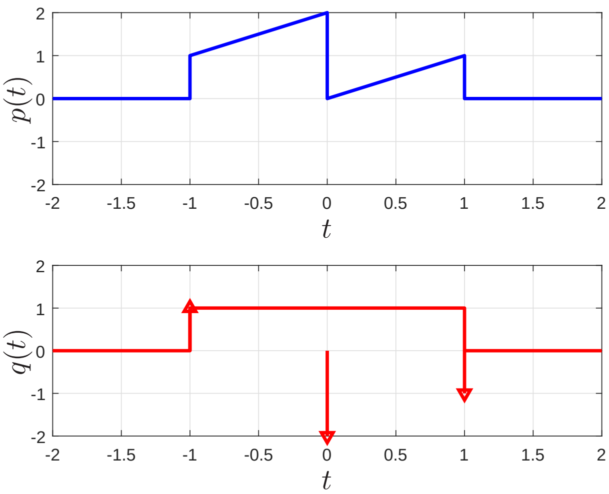
Solução:

$$\sum_k |c_k|^2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2}^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 5 + 9 + 9 + 4 + 4 + 1 = 32.$$

7ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de (1,0 ponto)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - 4k), \quad p(t) = (t+2)G_1(t+0.5) + tG_1(t-0.5).$$

Solução: $T = 4$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, $c_k = \frac{1}{4}\int_T p(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt = \frac{1}{jk\frac{\pi}{2}}d_k$ com $d_k = \frac{1}{4}\int_T q(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$ e $q(t) = \frac{d}{dt}p(t)$



$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{4}\left(\int_T \delta(t+1)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt - 2\int_T \delta(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt \right.\\ &\qquad \left. - \int_T \delta(t-1)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt + \int_{-1}^{1} e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{jk\frac{\pi}{2}} - 2 - e^{-jk\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{jk\frac{\pi}{2}}\left(e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(j\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1 + \frac{2}{k\pi}\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ c_k &= \frac{1}{jk\pi}\left(j\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1 + \frac{2}{k\pi}\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

b) Calcule c_0. (0,5 ponto)

Solução:

$$c_0 = \frac{1}{4}\int_T x(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{0}(t+2)dt + \int_0^1 tdt\right) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{t^2}{2} + 2t\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1\right] = \frac{1}{4}\left(-\cancel{\frac{1}{2}} + 2 + \cancel{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

c) Determine a potência média de $x(t)$. (0,5 ponto)

Solução:

$$= \frac{1}{4}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{0}(t+2)^2 dt + \int_0^1 t^2 dt\right) = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{0}(t^2+4t+4)dt + \int_0^1 t^2 dt\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 4t\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{t^3}{3}\right)_0^1\right) = \frac{1}{4}\left(-\left(-\frac{1}{3}+2-4\right)+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+2\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$