Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1ª Questão: Seja $\mathbb{W} = \mathbb{X}+2\mathbb{Y}$ tal que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são variáveis aleatórias discretas independentes com transformadas Z respectivamente dadas por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \frac{3}{3-z}, \ |z| < 3 \quad \text{e} \quad G_{\mathbb{Y}}(z) = \frac{2}{4-z}, \ |z| < 2.$$

Calcule:
a) A distribuição de probabilidades da variável aleatória $\mathbb{W}$ em $k = 1$, ou seja, $p[1] = \Pr\{\mathbb{W} = 1\}$. (0,5 ponto)

Solução:

$$G_{\mathbb{W}}(z) = G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z^2) = \frac{3}{3-z}\frac{2}{4-z^2} = \frac{6}{12-4z-3z^2+z^3}, \ |z| < 2$$

$$p[1] = G_{\mathbb{W}}^{(1)}(0) = \left(\frac{d}{dz}G_{\mathbb{W}}(z)\right)_{z=0} = \left(\frac{-6(-4-6z+3z^2)}{(12-4z-3z^2+z^3)^2}\right)_{z=0} = \frac{1}{6}.$$

b) A média da variável aleatória $\mathbb{W}$, ou seja, $\bar{w} = \mathcal{E}\{\mathbb{W}\}$. (0,5 ponto).

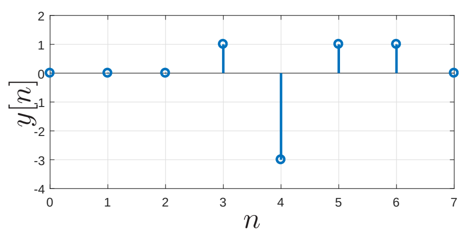
Solução:

$$\mathcal{E}\{W\} = \left(z\frac{d}{dz}G_{\mathbb{W}}(z)\right)_{z=1} = \frac{-6(-4-6+3)}{(12-4-3+1)^2} = \frac{7}{6}.$$

2ª Questão: Considere um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso dada por $h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1]$. Determine e esboce a saída $y[3-n]$ desse sistema (em termos de impulsos e impulsos deslocados) para a entrada $x[n] = u[n+2] - 2\delta[n+1] - u[n]$. (1,0 ponto)

Solução:

$$x[n] = \delta[n+2] - \delta[n+1]$$
$$y[n] = (\delta[n+2] - \delta[n+1]) * (\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1])$$
$$y[n] = \delta[n+3] + \delta[n+2] - 3\delta[n+1] + \delta[n]$$
$$y[3-n] = \delta[6-n] + \delta[5-n] - 3\delta[4-n] + \delta[3-n]$$
$$y[3-n] = \delta[n-6] + \delta[n-5] - 3\delta[n-4] + \delta[n-3].$$



3ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada ($x[n]$) - saída ($y[n]$):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k5^{1-k}x[n-k]u[k].$$

Classifique o sistema quanto a linearidade, invariância no tempo, BIBO estabilidade e causalidade justificando a resposta. (2,0 pontos)

Solução:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k5^{1-k}\delta[n-k]u[k] = n5^{1-n}u[n]$$

$$x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k5^{1-k}\delta[n-k]u[k]$$

Como a saída $y[n]$ é igual a convolução da entrada $x[n]$ com a resposta ao impulso $h[n]$, então o sistema é linear e invariante no tempo.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \left(\mathcal{Z}\{n(1/5)^{n-1}u[n]\}\right)_{z=1} = \left(\frac{z}{(z-1/5)^2}\right)_{z=1} = 25/16.$$

Como a resposta ao impulso é absolutamente somável, o sistema é BIBO estável. Como $h[n]=0$ para $n<0$ o sistema é causal.

4ª Questão: Sabendo que a transformada Z do sinal discreto $x[n]$ é dada por

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \frac{24z^2}{4z^2-1},\ |z| > 1/2,$$

determine: (2,0 pontos)

a)$x[0]$ b)$x[\infty]$ c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ d)$x[n]$

Solução:

a) $x[0] = \lim_{|z|\to\infty} X(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{24z^2}{4z^2-1} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{24}{4-1/z^2} = \frac{24}{4} = 6.$

b) $x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\times\frac{24z^2}{4z^2-1} = 0\times\frac{24}{3} = 0.$

c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} X(z) = \lim_{z\to 1}\frac{24z^2}{4z^2-1} = \frac{24}{3} = 8.$

d)

$$X(z) = \frac{24z^2}{4z^2-1} = \frac{6z^2}{(z-1/2)(z+1/2)} = 3\frac{z}{z-1/2} + 3\frac{z}{z+1/2},\ |z| > 1/2$$

$$x[n] = \left(3(1/2)^n + 3(-1/2)^n\right)u[n]$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal (em que $x[n]$ é a entrada e $y[n]$ é a saída) descrito pela seguinte equação a diferenças

$$y[n+2] - 7y[n+1] + 12y[n] = 4x[n+2] - 16x[n+1].$$

a) Determine a função de transferência $H(z)$ do sistema. (0,5 ponto)

Solução: Aplicando o conceito de auto-função, se $x[n] = z^n$, $y[n] = H(z)z^n$, então:

$$H(z)z^{n+2} - 7H(z)z^{n+1} + 12H(z)z^n = 4z^{n+2} - 16z^{n+1} \Rightarrow H(z)\cancel{z^n}(z^2-7z+12) = \cancel{z^n}(4z^2-16z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{4z^2-16z}{z^2-7z+12}.$$

b) Determine solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = (-6)^n \times 3 \times (2)^{-n}$. (0,5 ponto)

Solução:

$$x[n] = 2^n \times (-3)^n \times (2)^n \times 3 = 3(-3)^n$$

$$H(-3) = \frac{4(9)+48}{9+21+12} = \frac{84}{42} = 2$$

$$y[n] = 3H(-3)(-3)^n = 6(-3)^n.$$

6ª Questão: Considere o sinal discreto periódico $x[n] = 2 - \exp\left(j\frac{5\pi}{3}n\right) + 6\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - j4\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}n\right)$.
a) Determine o período fundamental N de $x[n]$. (0,5 ponto)

Solução:

$$\beta_1 = \frac{2\pi p_1}{q_1} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow q_1 = \frac{6p_1}{5} \geq 6 \Rightarrow N_1 = 6.$$
$$\beta_2 = \frac{2\pi p_2}{q_2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow q_2 = 4p_2 \geq 4 \Rightarrow N_2 = 4.$$
$$\beta_3 = \frac{2\pi p_3}{q_3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow q_3 = \frac{3p_3}{2} \geq 3 \Rightarrow N_3 = 3.$$

N é o mínímo múltiplo comum entre 6, 4 e 3, ou seja, $N = 12$.

b) Determine os coeficientes c_k de $k = 0, \ldots, N-1$ da série exponencial de Fourier. (1,0 ponto)

Solução:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{11} c_k \exp\left(jk\frac{\pi}{6}n\right)$$

$$x[n] = \underbrace{2}_{k=0} \underbrace{-\exp\left(j\frac{5\pi}{3}n\right)}_{k=10} \underbrace{+3\exp\left(j\frac{\pi}{2}n\right)}_{k=3} \underbrace{+3\exp\left(-j\frac{\pi}{2}n\right)}_{k=-3} \underbrace{-2\exp\left(j\frac{4\pi}{3}n\right)}_{k=8} \underbrace{+2\exp\left(-j\frac{4\pi}{3}n\right)}_{k=-8}$$

$$c_0 = 2, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = c_{-8} = 2, \quad c_8 = -2, \quad c_9 = c_{-3} = 3, \quad c_{10} = -1,$$

Demais coeficientes nulos: $c_1 = c_2 = c_5 = c_6 = c_7 = c_{11} = 0$.

c) Determine a potência média de $x[n]$. (0,5 ponto)

Solução:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = 4 + 9 + 4 + 4 + 9 + 1 = 31.$$

7ª Questão: Determine a convolução $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ do sinal $x_1[n] = n2^n u[n]$ com a sequência $x_2[n]$ cuja transformada Z é dada por (1,0 ponto)

$$X_2(z) = \frac{2z}{z-2}, \quad |z| > 2.$$

Solução:

$$\mathcal{Z}\{n2^n u[n]\} = \mathcal{Z}\{2n2^{n-1}u[n]\} = 2\mathcal{Z}\{n2^{n-1}u[n]\} = 2\frac{z}{(z-2)^2}$$

$$Y(z) = 2\frac{z}{(z-2)^2}\frac{2z}{z-2} = 4\frac{z^2}{(z-2)^3}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = 4\frac{z}{(z-2)^3} = \frac{a}{(z-2)^3} + \frac{b}{(z-2)^2} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = (z-2)^3 \frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=2} = 2 \times 2^2 = 8$$

$$b = \frac{d}{dz}(z-2)^3 \frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=2} = 2 \times 2 = 4$$

$$c = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left.(z-2)^3\frac{Y(z)}{z}\right|_{z=2} = 0$$

$$Y(z) = 8\frac{z}{(z-2)^3} + 4\frac{z}{(z-2)^2}$$

$$y[n] = 8\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2^{n-2}u[n] + 4\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 2^{n-1}u[n]$$

$$y[n] = n(n+1)2^n u[n]$$