Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

$1^{\underline{a}}$ Questão: Seja $\mathbb{W} = \mathbb{X} + 2\mathbb{Y}$ tal que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são variáveis aleatórias discretas independentes com transformadas Z respectivamente dadas por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \frac{3}{3-z}, \ |z| < 3 \quad \text{e} \quad G_{\mathbb{Y}}(z) = \frac{2}{4-z}, \ |z| < 2.$$

Calcule:

a) A distribuição de probabilidades da variável aleatória $\mathbb{W}$ em $k = 1$, ou seja, $p[1] = \Pr\{\mathbb{W} = 1\}$. (0,5 ponto)

b) A média da variável aleatória $\mathbb{W}$, ou seja, $\bar{w} = \mathcal{E}\{\mathbb{W}\}$. (0,5 ponto).

$2^{\underline{a}}$ Questão: Considere um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso dada por $h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1]$. Determine e esboce a saída $y[3-n]$ desse sistema (em termos de impulsos e impulsos deslocados) para a entrada $x[n] = u[n+2] - 2\delta[n+1] - u[n]$. (1,0 ponto)

$3^{\underline{a}}$ Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada ($x[n]$) - saída ($y[n]$):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k5^{1-k} x[n-k]u[k].$$

Classifique o sistema quanto a linearidade, invariância no tempo, BIBO estabilidade e causalidade justificando a resposta. (2,0 pontos)

4ª Questão: Sabendo que a transformada Z do sinal discreto $x[n]$ é dada por

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \frac{24z^2}{4z^2 - 1}, \ |z| > 1/2,$$

determine: (2,0 pontos)

a)$x[0]$ b)$x[\infty]$ c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ d)$x[n]$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal (em que $x[n]$ é a entrada e $y[n]$ é a saída) descrito pela seguinte equação a diferenças

$$y[n+2] - 7y[n+1] + 12y[n] = 4x[n+2] - 16x[n+1].$$

a) Determine a função de transferência $H(z)$ do sistema. (0,5 ponto)

b) Determine solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = (-6)^n \times 3 \times (2)^{-n}$. (0,5 ponto)

6ª Questão: Considere o sinal discreto periódico $x[n] = 2 - \exp\left(j\frac{5\pi}{3}n\right) + 6\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - j4\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}n\right)$.
a) Determine o período fundamental N de $x[n]$. (0,5 ponto)

b) Determine os coeficientes c_k de $k = 0, \ldots, N-1$ da série exponencial de Fourier. (1,0 ponto)

c) Determine a potência média de $x[n]$. (0,5 ponto)

7ª Questão: Determine a convolução $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ do sinal $x_1[n] = n2^n u[n]$ com a sequência $x_2[n]$ cuja transformada Z é dada por (1,0 ponto)

$$X_2(z) = \frac{2z}{z-2}, \quad |z| > 2.$$

Convolução: $x_1[n]*x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k]$, $x[n]*\delta[n] = x[n]$, $x[n]*\delta[n-m] = x[n-m]$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT):

$\Rightarrow$ $y[n] = x[n]*h[n]$, $h[n] = \mathcal{G}\{\delta[n]\}$, $y[n] = z^n*h[n] = H(z)z^n$, $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

Resp. em freqüência:
$M(\omega)\exp(j\phi(\omega)) = H(z=\exp(j\omega))$, $h[n]$ real , $x[n] = \cos(\omega n)$ $\Rightarrow$ $y[n] = M(\omega)\cos(\omega n + \phi(\omega))$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}, \quad \mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}\ ,\ |z|>|a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a}\ ,\ |z|<|a|$$

$$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}\ ,\ |z|>|a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}\ ,\ |z|<|a|$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z\in\Omega_x \Leftrightarrow \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1}\in\Omega_x \quad , \quad \mathcal{Z}\{x_1[n]*x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$$

$$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\}\Big|_{z=1}\ ,\ 1\in\Omega_x\ ,\ m\in\mathbb{N}$$

$$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} \quad , \quad m\in\mathbb{Z}_+\ ,\ \Omega_y = \Omega_x$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\Big(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\Big)\ ,\ m\in\mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}\ ,\ |z|>|a|\ ,\ m\in\mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2}\ ,\ |z|>|a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}\ ,\ m\in\mathbb{N}\ ,\ |z|>|a|$$

$x[0] = \lim_{|z|\to+\infty} X(z)$, Ω_x exterior de um círculo , $x[+\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$, $|z|>\rho$, $0<\rho\le 1$

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X}=k\}z^k$$

Seqüências $p[n]$ à direita do 0: $G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n \quad \Rightarrow \quad p[n] = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k] \quad , \quad \sigma^2_{\mathbb{X}} = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2 \quad , \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}$$

$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ var. aleatórias independentes $\Rightarrow$ $G_{a\mathbb{X}+b\mathbb{Y}} = \mathcal{E}\{z^{(a\mathbb{X}+b\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{a\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{b\mathbb{Y}}\} = G_{\mathbb{X}}(z^a)G_{\mathbb{Y}}(z^b)$

$x[n] = \exp(j\beta n)$ periódica $\Leftrightarrow$ $\beta = 2\pi\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z}$ Potência média: $\frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} |x[n]|^2 = \sum_{k\in\bar{N}} |c_k|^2$

$x[n] = \sum_{k\in\bar{N}} c_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$, $c_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$, $\bar{N}$ conj. de N inteiros consecutivos