Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

1ª Questão: Determine a resposta ao impulso do sistema

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} x[n-k]u[k]$$

e utilize-a para classificá-lo quanto à linearidade, invariância no tempo, BIBO estabilidade e causalidade. (1,0 ponto)

Solução:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k2^k \delta[n-k]u[k] = n2^n u[n]$$

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k2^k x[n-k]u[k] = y[n]$$

Como a saída $y[n]$ é igual a convolução da entrada $x[n]$ com a resposta ao impulso $h[n]$, então o sistema é linear e invariante no tempo.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k2^k|u[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k2^k \to \infty$$

Como a resposta ao impulso não é absolutamente somável, o sistema não é BIBO estável. Como $h[n] = 0$ para $n < 0$ o sistema é causal.

2ª Questão: Sabendo que a transformada Z do sinal discreto $x[n]$ é dada por

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \frac{27z^2}{9z^2-1},\ |z| > 1/3,$$

determine: (2,0 pontos)

a)$x[0]$ b)$x[\infty]$ c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ d)$x[n]$

Solução:

a) $x[0] = \lim_{|z|\to\infty} X(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{27z^2}{9z^2-1} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{27}{9-1/z^2} = \frac{27}{9} = 3.$

b) $x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1) \times \frac{27z^2}{9z^2-1} = 0 \times \frac{27}{8} = 0.$

c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} X(z) = \lim_{z\to 1} \frac{27z^2}{9z^2-1} = \frac{27}{8}.$

d)

$$X(z) = \frac{27z^2}{9z^2-1} = \frac{3z^2}{(z-1/3)(z+1/3)} = \frac{3}{2}\frac{z}{z-1/3} + \frac{3}{2}\frac{z}{z+1/3},\ |z| > 1/3$$

$$x[n] = (3/2)\left((1/3)^n + (-1/3)^n\right)u[n]$$

3ª Questão: Seja $\mathbb{W} = 2\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ tal que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são variáveis aleatórias discretas independentes com transformadas Z respectivamente dadas por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \frac{5}{4-z},\ |z| < 2 \quad \text{e} \quad G_{\mathbb{Y}}(z) = \frac{2}{5-z},\ |z| < 5.$$

Calcule: (1,0 ponto)
a) A distribuição de probabilidades da variável aleatória $\mathbb{W}$ em $k = 1$, ou seja, $p[1] = \Pr\{\mathbb{W} = 1\}$.
b) A média da variável aleatória $\mathbb{W}$, ou seja, $\bar{w} = \mathcal{E}\{\mathbb{W}\}$.

Solução: a)

$$G_{\mathbb{W}}(z) = G_{\mathbb{X}}(z^2)G_{\mathbb{Y}}(z) = \frac{5}{4-z^2}\frac{2}{5-z} = \frac{10}{20-4z-5z^2+z^3}, \ |z| < 2$$

$$p[1] = G_{\mathbb{W}}^{(1)}(0) = \left(\frac{d}{dz}G_{\mathbb{W}}(z)\right)_{z=0} = \left(\frac{-10(-4-10z+3z^2)}{(20-4z-5z^2+z^3)^2}\right)_{z=0} = \frac{40}{20^2} = \frac{1}{10}.$$

b)

$$\mathcal{E}\{W\} = \left(z\frac{d}{dz}G_{\mathbb{W}}(z)\right)_{z=1} = \left(\frac{-10z(-4-10z+3z^2)}{(20-4z-5z^2+z^3)^2}\right)_{z=1} \frac{-10(-4-10+3)}{(20-4-5+1)^2} = \frac{110}{12^2} = \frac{55}{72}.$$

4ª Questão: Considere o sinal discreto periódico $x[n] = 1 + 2\exp(j\pi n) - 4\cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) + j6\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.
a) Determine o período fundamental N de $x[n]$. (0,5 ponto)

Solução:

$$\beta_1 = \frac{2\pi p_1}{q_1} = \pi \Rightarrow q_1 = 2p_1 \geq 2 \Rightarrow N_1 = 2.$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi p_2}{q_2} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow q_2 = \frac{3p_2}{2} \geq 3 \Rightarrow N_2 = 3.$$

$$\beta_3 = \frac{2\pi p_3}{q_3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow q_3 = 4p_3 \geq 4 \Rightarrow N_3 = 4.$$

N é o mínímo múltiplo comum entre 2, 3 e 4, ou seja, $N = 12$.

b) Determine os coeficientes c_k de $k = 0, \ldots, N-1$ da série exponencial de Fourier. (0,5 ponto)

Solução:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{11} c_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{12}n\right) = \sum_{k=0}^{11} c_k \exp\left(jk\frac{\pi}{6}n\right)$$

$$x[n] = \underbrace{1}_{k=0} + 2\underbrace{\exp(j\pi n)}_{k=6} - 2\underbrace{\exp\left(j\frac{4\pi}{3}n\right)}_{k=8} - 2\underbrace{\exp\left(-j\frac{4\pi}{3}n\right)}_{k=-8} + 3\underbrace{\exp\left(j\frac{\pi}{2}n\right)}_{k=3} - 3\underbrace{\exp\left(-j\frac{\pi}{2}n\right)}_{k=-3}$$

$$c_0 = 1, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = c_{-8} = -2, \quad c_6 = 2, \quad c_8 = -2, \quad c_9 = c_{-3} = -3,$$

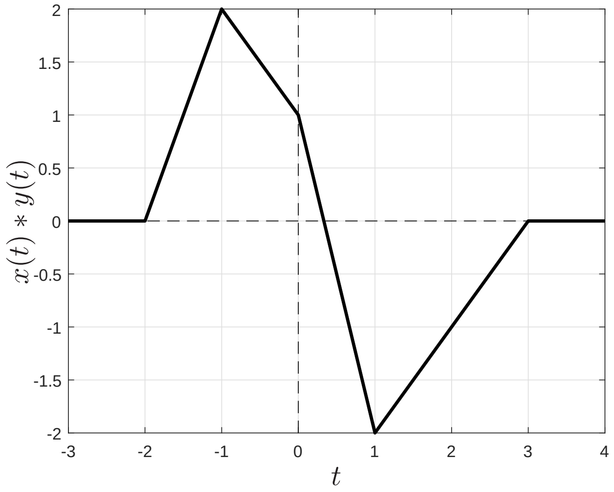
Demais coeficientes nulos: $c_1 = c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = c_{11} = 0$.

c) Determine a potência média de $x[n]$. (0,5 ponto)

Solução:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = 1 + 9 + 4 + 4 + 4 + 9 = 31.$$

5ª Questão: Determine e esboce $x(t) * y(t)$, para $x(t) = G_2(t)$ e $y(t) = 2G_1(t+0.5) - G_2(t-1)$ (1,0 ponto)



Solução:
$x(t) * y(t) = (u(t+1) - u(t-1)) * y(t) =$
$I_y(t+1) - I_y(t-1)$ em que

$$I_y(t) = (2t+2)G_1(t+0,5)+(2-t)G_2(t-1),$$

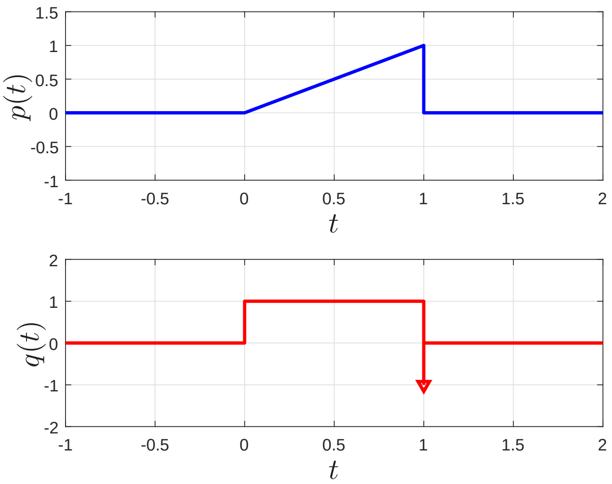
então

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= (2t+4)G_1(t+1,5) + (1-t)G_1(t+0,5) \\ &+(1-3t)G_1(t-0,5) + (t-3)G_2(t-2) \end{aligned}$$

6ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de (0,5 ponto)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t-6k), \quad p(t) = t\ G_1(t-0.5).$$

Solução: $T = 6$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$,



$$c_k = \frac{1}{6}\int_6 p(t)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt = \frac{1}{jk\frac{\pi}{3}}d_k$$

com $d_k = \dfrac{1}{6}\int_6 q(t)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt$ e $q(t) = \dfrac{d}{dt}p(t)$

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{6}\left(-\int_T \delta(t-1)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt + \int_0^1 e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(-e^{-jk\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{jk\frac{\pi}{3}}\left(e^{-jk\frac{\pi}{3}} - 1\right)\right) \\ c_k &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{jk\frac{\pi}{3}}\left(-e^{-jk\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{jk\frac{\pi}{3}}\left(e^{-jk\frac{\pi}{3}} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

b) Calcule c_0. (0,5 ponto)

Solução:

$$c_0 = \frac{1}{6}\int_T x(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^1 t\ dt = \frac{1}{6}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

c) Determine a potência média de $x(t)$. (0,5 ponto)

Solução:

$$= \frac{1}{6}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{6}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{6}\left(\frac{t^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

7ª Questão: a) Determine o valor da integral $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\text{Sa}(t)dt$ com $x(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(-\dfrac{2}{\pi}\text{Sa}(2t)\right)$. (1,0 ponto)

Solução:
$\mathcal{F}\{-\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(2t)\} = -\frac{2}{\pi}\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(2t)\} = -\frac{2}{\pi}\frac{2\pi}{4}G_4(\omega) = -G_4(\omega)$
$\mathcal{F}\{\frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(2t)\right)\} = (j\omega)^2(-G_4(\omega)) = \omega^2 G_4(\omega)$
Sabendo que $\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(t)\} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}G_2(\omega) = \pi G_2(\omega)$

$$\begin{aligned}
I = \mathcal{F}\{x(t)\mathrm{Sa}(t)\}_{\omega=0} &= \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(t)\}\right)_{\omega=0} \\
&= \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left((\omega^2)G_4(\omega) * \cancel{\pi}G_2(\omega)\right)_{\omega=0} \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\beta)^2 G_4(\omega-\beta)G_2(\beta)d\beta\right)_{\omega=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\beta^2\right)G_4(\beta)G_2(\beta)d\beta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\beta^2)d\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^3}{3}\right)_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$8^{\underline{a}}$ Questão: Sabendo que a transformada de Laplace de $x(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{3-9s}{s^2-4s-5},\ -1 < \mathrm{Re}(s) < 5,$$

determine: (1,0 ponto)

$$\text{a)}\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)dt \qquad\qquad \text{b)}x(t)$$

Solução:
a) $\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)dt = -\frac{d}{ds}X(s)\Big|_{s=0} = -\left(\frac{-9(s^2-4s-5)-(2s-4)(3-9s)}{(s^2-4s-5)^2}\right)_{s=0} = -\frac{57}{25}.$
b)

$$X(s) = \frac{3-9s}{s^2-4s-5} = -2\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{X_1(s)} -7\underbrace{\frac{1}{s-5}}_{X_2(s)},\quad \Omega_{x_1} = s \in \mathrm{Re}(s) > -1,\quad \Omega_{x_2} = s \in \mathrm{Re}(s) < 5$$

$$Y_2(s) = X_2(-s) = \frac{-7}{-s+5} = \frac{7}{s-5},\quad \Omega_{y_2} = -s \in \Omega_{x_2} = \mathrm{Re}(-s) < 5 = \mathrm{Re}(s) > -5.$$

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = -2\exp(-t)u(t)$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_2(s)\} = 7\exp(-5t)u(t) \rightarrow x_2(t) = y_2(-t) = 7\exp(5t)u(-t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = -2\exp(-t)u(t) + 7\exp(5t)u(-t)$$