

Comentários Parte I - Capítulo 14

Resolução de Equações Diferenciais por Transformada de Laplace

Cecília de Freitas Moraes

cfmoraes@unicamp.br

Definição e Propriedades

Transformada unilateral de Laplace

Para resolver equações diferenciais, consideramos sinais à direita $x(t) = x(t)u(t)$, ou seja, transformada de Laplace unilateral:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Propriedade da derivada

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m X(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} x^{(k)}(0).$$

Valor inicial

Se o grau do denominador de $X(s)$ > que o grau do numerador:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s).$$

Valor final

$X(s)$ possui no máximo um polo em $s = 0$ e todos os demais com parte real negativa:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

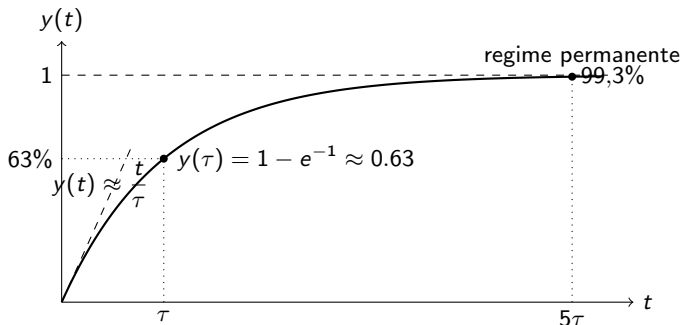
Forma padrão para sistemas de 1ª ordem

Considere a seguinte função de transferência padrão de um sistema de primeira ordem (τ é a constante de tempo necessária para a resposta atingir 63% de seu valor final):

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}.$$

Para uma entrada degrau unitário,

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s - 1/\tau} \Rightarrow y(t) = (1 - e^{-t/\tau})u(t).$$



Formas padrão para sistemas de 2ª ordem

Função de transferência e polos

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- ω_n : frequência natural;
- ζ : coeficiente de amortecimento ($0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ resposta subamortecida).

Polos:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}.$$

Para $0 < \zeta < 1$ e $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d.$$

ω_d : frequência de oscilação amortecida.

Resposta ao impulso

O denominador de $H(s)$ pode ser reescrito como

$$(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \cancel{\zeta^2\omega_n^2} + \omega_n^2 - \cancel{\zeta^2\omega_n^2}$$

Assim,

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \Rightarrow$$
$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

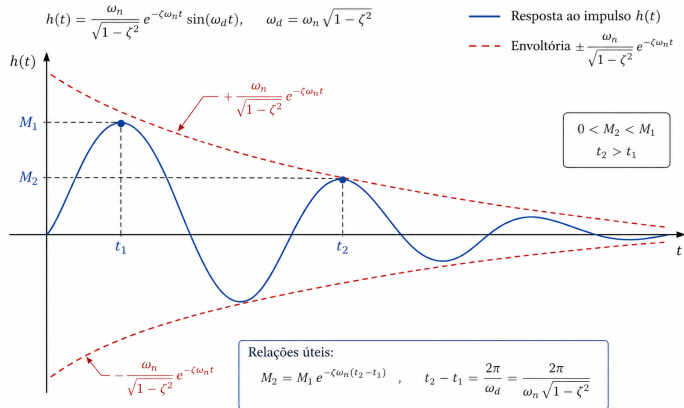
Como

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \sin(\beta t) u(t)\} = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2},$$

Interpretação da resposta ao impulso para sistemas de 2ª ordem

Resposta ao impulso – Sistema de 2ª ordem subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$



$$\frac{M_1}{M_2} = e^{\zeta\omega_n T}.$$

Como

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}},$$

temos

$$\ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Definindo

$$\delta = \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right),$$

obtemos

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem

Para uma entrada degrau unitário $X(s) = \frac{1}{s}$, tem-se

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}.$$

A decomposição em frações parciais é

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{C(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}.$$

$$A = sY(s)|_{s=0} = 1.$$

Calculando o MMC e comparando coeficientes:

$$A((s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2) + B\omega_d s + Cs(s + \zeta\omega_n) = \omega_n^2$$

$$s^2 : A + C = 0 \Rightarrow C = -1,$$

$$s^1 : B\omega_d + 2\zeta\omega_n A + \zeta\omega_n C = 0 \Rightarrow B = -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Como

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)u(t)\} = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2},$$

e

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \cos(\beta t)u(t)\} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2},$$

Aplicando a transformada inversa:

$$y(t) = \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right) u(t)$$

A resposta apresenta:

- valor final igual a 1;
- oscilações amortecidas para $0 < \zeta < 1$;
- taxa de decaimento determinada por $\zeta\omega_n$;
- frequência de oscilação determinada por ω_d .

Interpretação da resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem

O primeiro pico ocorre quando $\frac{dy(t)}{dt} = 0$, o que ocorre em:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Nesse instante, $\omega_d t_p = \pi$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$. Assim,

$$y(t_p) = 1 + e^{-\zeta \omega_n \pi / \omega_d}$$

Como

$$\frac{\omega_n}{\omega_d} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

segue que

$$y(t_p) = 1 + e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Resposta ao degrau unitário – Sistema de 2ª ordem subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

